RESPUESTAS GUIA 8 – AÑO 2019

NOTA: En todos los casos de escalones de energía potencial, y de barrera tipo delta de Dirac, se ha supuesto la interfaz en x=0.

1) Ecuación de onda:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Ecuación de onda fasorial:

$$\frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial t^2}$$

Reemplazamos:

$$\tilde{y} = \varphi(x)\, e^{-i\omega t}$$

Y termina quedando:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + k^2\, \varphi(x) = 0}$$

Que es la ecuación que debe satisfacer φ(x).

La solución de la ecuación diferencial es:

$$\varphi(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx)$$

Condiciones de contorno para x=0 (extremo fijo):

$$\varphi(0) = 0 \;\Rightarrow A = 0 \;\Rightarrow\; \varphi(x) = B\sin(kx)$$

Condición de contorno para x=L:

$$\varphi(L) = \pm B \;\Rightarrow kL = \frac{\pi}{2} + N\pi \Rightarrow k = \frac{(1+2N)\pi}{2L}$$

$$\boxed{\Rightarrow f = \frac{(1+2N)c}{4L}}$$

2) Ecuación de Schrodinger:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\ \frac{\partial^2\Psi(\mathrm{x,t})}{\partial x^2}+V(x)\ \Psi(x,t)=i\ \hbar\ \frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}$$

Note que para este ejercicio suponemos V(x)=E_P(x) independiente del tiempo.

Ahora, en la anterior, reemplazamos:

$$\Psi(x,t)=\phi(x)\ e^{-i\omega t}$$

Y queda:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\ e^{-i\omega t}\ \frac{d^2\phi(\mathrm{x})}{dx^2}+V(x)\ \phi(x)e^{-i\omega t}=i\ \hbar\ (-i\omega)\phi(x)e^{-i\omega t}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\ \frac{d^2\phi(\mathrm{x})}{dx^2}+V(x)\ \phi(x)=\ \hbar\omega\ \phi(x)$$

Pero la energía total de la partícula (cinética más potencial) es:

$$E=h\ f=\hbar\ \omega$$

De donde:

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\ \frac{d^2\phi(\mathrm{x})}{dx^2}+V(x)\ \phi(x)=\ E\ \phi(x)}$$

3) Ecuación de Schrodinger:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\ \frac{\partial^2\Psi(\mathrm{x,t})}{\partial x^2}+V(x)\ \Psi(x,t)=i\ \hbar\ \frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}$$

Ecuación de Schrodinger conjugada:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\ \frac{\partial^2\Psi^*(\mathrm{x,t})}{\partial x^2}+V(x)\ \Psi^*(x,t)=-i\ \hbar\ \frac{\partial\Psi^*(x,t)}{\partial t}$$

A la ecuación de Schrodinger sin conjugar, la multiplicamos por Ψ^*:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\ \frac{\partial^2\Psi(\mathrm{x,t})}{\partial x^2}\ \Psi^*(x,t)+V(x)\ \Psi(x,t)\Psi^*(x,t)=i\ \hbar\ \frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}\Psi^*(x,t)$$

A la ecuación de Schrodinger conjugada, la multiplicamos por Ψ:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\ \frac{\partial^2\Psi^*(\mathrm{x,t})}{\partial x^2}\Psi(x,t)+V(x)\ \Psi^*(x,t)\Psi(x,t)=-i\ \hbar\ \frac{\partial\Psi^*(x,t)}{\partial t}\Psi(x,t)$$

Ahora restamos la penúltima ecuación menos la última:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{\partial^2\Psi(\mathrm{x,t})}{\partial x^2}\,\Psi^*(x,t)-\frac{\partial^2\Psi^*(\mathrm{x,t})}{\partial x^2}\Psi(x,t)\right]=$$

$$=i\,\hbar\left[\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}\Psi^*(x,t)+\frac{\partial\Psi^*(x,t)}{\partial t}\Psi(x,t)\right]$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial\Psi(\mathrm{x,t})}{\partial x}\,\Psi^*(x,t)-\frac{\partial\Psi^*(\mathrm{x,t})}{\partial x}\Psi(x,t)\right]=i\,\hbar\frac{\partial|\Psi(x,t)|^2}{\partial t}$$

Ahora, la densidad de probabilidad es:

$$\rho=|\Psi(x,t)|^2$$

Y comparando con la ecuación clásica para la densidad de corriente de carga:

$$div\,\vec{J}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

La cual en una dimensión es:

$$\frac{\partial J}{\partial x}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

Queda que la corriente de probabilidad es:

$$\boxed{j_P=\frac{\hbar}{2\,m\,i}\left[\frac{\partial\Psi(\mathrm{x,t})}{\partial x}\,\Psi^*(x,t)-\frac{\partial\Psi^*(\mathrm{x,t})}{\partial x}\Psi(x,t)\right]}$$

5) a) Hacia la derecha puede subir los 50m y luego sigue con v=18.52m/s. Hacia la izquierda puede subir los 15m y luego los 20m y luego sigue con v=30.51m/s.

b) Hacia la derecha, no puede remontar los 50m, llegando hasta una altura de 25.41m. Hacia la izquierda puede subir los 15m y luego los 20m y luego sigue con v=10.30m/s.

c) Hacia la derecha, no puede remontar los 50m, llegando hasta una altura de 16.48m. Hacia la izquierda puede subir los 15m pero luego no puede subir los 20m, encontrando otro punto de retorno a una altura de 16.48m. El carrito irá y volverá entre el punto de retorno izquierdo y el derecho.

d) Hacia la derecha, no puede remontar los 50m, llegando hasta una altura de 10.10m. Hacia la izquierda, no puede remontar la primera loma de 15m, llegando hasta una altura de 10.10m. El carrito irá y volverá entre el punto de retorno izquierdo y el derecho.

6) a) Al llegar a la interfaz, todos los electrones continúan su movimiento, con T=1, R=0.

b) Al llegar a la interfaz, todos los electrones rebotan, con T=0, R=1.

c) Primero, plantear la ecuación de Schrodinger dependiente del tiempo. Por medio de la separación de variables, llegar a la ecuación de Schrodinger independiente del tiempo. Obtener también la solución de la ecuación diferencial temporal.

Ahora sí, planteamos la ecuación de Schrodinger independiente del tiempo para la región #1. Luego del reordenamiento algebraico queda:

$$\frac{d^2\phi_1}{dx^2} + \frac{2mE}{\eta^2}\phi_1 = \frac{d^2\phi_1}{dx^2} + k_1^2\phi_1 = 0$$

Cuya solución es:

$$\phi_1 = A\exp(ik_1x) + B\exp(-ik_1x)$$

Hacer lo mismo para la región #2:

$$\phi_2 = C\exp(ik_2x)$$

Termina resultando, a partir de las condiciones de contorno:

$$B = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)A \qquad C = \left(\frac{2k_1}{k_1 + k_2}\right)A$$

Entonces:

$$R = -\frac{j_{REF}}{j_{INC}} = -\frac{\left[-\frac{\eta k_1}{m}|B|^2\right]}{\frac{\eta k_1}{m}|A|^2} = 0.00067$$

$$T = \frac{j_{TR}}{j_{INC}} = \frac{\frac{\eta k_2}{m}|C|^2}{\frac{\eta k_1}{m}|A|^2} = 0.99933$$

d) Idem inciso (c), salvo que la ecuación de Schrodinger aplicada a la región #2 queda:

$$\frac{d^2\phi_2}{dx^2} - \frac{2m(V_0 - E)}{\eta^2}\phi_2 = \frac{d^2\phi_2}{dx^2} - \alpha_2^2\phi_2 = 0$$

Cuya solución es:

$$\phi_2 = C\exp(-\alpha_2 x)$$

Luego, llegar a:

$$B = \left(\frac{ik_1 + \alpha_2}{ik_1 - \alpha_2}\right)A \qquad C = \left(\frac{2k_1 i}{ik_1 - \alpha_2}\right)A$$

De donde:

$$|B| = \frac{\sqrt{k_1^2 + \alpha_2^2}}{\sqrt{k_1^2 + \alpha_2^2}} |A| = |A| \qquad |C| = \left(\frac{2k_1}{\sqrt{k_1^2 + \alpha_2^2}} \right) \cdot |A|$$

Entonces:

$$R = -\frac{j_{REF}}{j_{INC}} = -\frac{\left[-\frac{\eta k_1}{m} |B|^2 \right]}{\frac{\eta k_1}{m} |A|^2} = 1$$

$$T = \frac{j_{TR}}{j_{INC}} = \frac{0}{\frac{\eta k_1}{m} |A|^2} = 0$$

Ya que:

$$j_{TR} = \frac{\hbar}{2mi} \left(\frac{\partial \Psi_{TR}}{\partial x} \Psi_{TR}^* - \frac{\partial \Psi_{TR}^*}{\partial x} \Psi_{TR} \right) = 0$$

Usando:

$$\Psi_{TR} = C \exp(-\alpha_2 x) \exp\left(\frac{-i E t}{\hbar} \right)$$

7) Caso clásico: todas rebotan: T=0, R=1.

Caso cuántico:

$$\phi_1 = A \exp(ik_1 x) + B \exp(-ik_1 x)$$

$$\phi_2 = 0$$

Y resulta B=-A, de donde:

$$R = -\frac{j_{REF}}{j_{INC}} = -\frac{\left[-\frac{\eta k_1}{m} |B|^2 \right]}{\frac{\eta k_1}{m} |A|^2} = 1$$

$$T = \frac{j_{TR}}{j_{INC}} = \frac{0}{\frac{\eta k_1}{m} |A|^2} = 0$$

8)

$$\phi_1 = A \exp(ikx) + B \exp(-ikx)$$

$$\phi_2 = C\exp(ikx)$$

En este caso P=1000eVm=1.6 10^{-16}Jm, k=5.14 10^{11}rad/m

Hay que llegar a:

$$T = \frac{1}{1+\left(\frac{mP}{\eta^2 k}\right)^2} = 1.5\cdot 10^{-21}$$

$$R = \frac{1}{1+\left(\frac{\eta^2 k}{mP}\right)^2} \cong 1$$

¿Por qué dio un T tan pequeño? Porque una barrera de $1.6\cdot 10^{-16}$Jm es muy grande: por ejemplo 1000000eV de altura y nada menos que 1mm de ancho.

9) Primero, plantear la ecuación de Schrodinger dependiente del tiempo. Por medio de la separación de variables, llegar a la ecuación de Schrodinger independiente del tiempo. Obtener también la solución de la ecuación diferencial temporal.
Ahora sí, planteamos la ecuación de Schrodinger independiente del tiempo para la región #2 (dentro del pozo). Luego del reordenamiento algebraico queda:

$$\frac{d^2\phi_2}{dx^2} + \frac{2mE}{\eta^2}\phi_2 = \frac{d^2\phi_2}{dx^2} + k_2^2\phi_2 = 0$$

Cuya solución es:

$$\phi_2 = A\sin(k_2 x) + B\cos(k_2 x)$$

En las regiones #1 y #3:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} - \frac{2m(V_0 - E)}{\eta^2}\phi = \frac{d^2\phi}{dx^2} - \infty\phi = 0$$

Cuya solución es:

$$\phi_1 = 0 \qquad\qquad \phi_3 = 0$$

Si ponemos el origen del eje x en uno de los bordes, la condición de contorno en x=0 fuerza que B=0, de donde:

$$\phi_2 = A\sin(k_2 x) \qquad\qquad k_2 = \sqrt{\frac{2mE}{\eta^2}}$$

Con la condición de contorno en x=a, surge $k_2 = n \pi / a$

Entonces, para a=1nm (pozo microscópico), llegar a:

$$E_1 = 6 \cdot 10^{-20} J$$
$$E_2 = 2.4 \cdot 10^{-19} J$$
$$E_3 = 5.4 \cdot 10^{-19} J$$

Y para a=1m (pozo macroscópico), llegar a:

$$E_1 = 6 \cdot 10^{-38} J$$
$$E_2 = 2.4 \cdot 10^{-37} J$$
$$E_3 = 5.4 \cdot 10^{-37} J$$

Obtener conclusiones de esto. Las partículas clásicas, ¿a cuál de los dos casos se parecen?

10)

$$\phi_1 = A \exp(ikx) + B \exp(-ikx) \qquad x < 0$$

$$\phi_2 = Cx + D \qquad 0 < x < a$$

$$\phi_3 = F \exp(ikx) \qquad x > a$$

Donde ϕ_2 surge de resolver la ecuación de Schrodinger en la región #2.

Resolviendo las condiciones de contorno, llegar a:

$$F = \frac{2ki \exp(-ika)}{ak^2 + 2ki} A$$

$$B = \frac{ak^2}{ak^2 + 2ki} A$$

De donde:

$$|F| = \frac{2k}{\sqrt{a^2k^4 + 4k^2}} |A|$$
$$|B| = \frac{k^2 a}{\sqrt{a^2k^4 + 4k^2}} |A|$$

Entonces:

$$R = \frac{a^2k^2}{4 + a^2k^2} \qquad\qquad T = \frac{4}{4 + a^2k^2}$$

Caso del electrón interatómico: a=10^{-10}m, V_0=8 10^{-19}J, resulta T=0.75, R=0.25.

Caso macroscópico: electrón en grilla: a=10^{-3}m, V_0=(-100)(-1.6 10^{-19})=1.6 10^{-17}J, entonces da T=1.5 10^{-15}, R≅1.

11) a) <u>Escalón:</u> E>V_0 y E<V_0: ver respuestas del ejercicio 6.

E=V_0:

$$\phi_1 = A\exp(ikx) + B\exp(-ikx)$$
$$\phi_2 = C$$

Se llega a:

$$B = A \qquad\qquad C = 2A$$

De donde:

$$R = -\frac{j_{REF}}{j_{INC}} = -\frac{\left[-\frac{\eta k_1}{m}|B|^2\right]}{\frac{\eta k_1}{m}|A|^2} = 1$$

$$T = \frac{j_{TR}}{j_{INC}} = \frac{0}{\frac{\eta k_1}{m}|A|^2} = 0$$

b) <u>Barrera:</u> E>V_0:

$$\phi_1 = A\exp(ik_1x) + B\exp(-ik_1x) \qquad\qquad x < 0$$

$$\phi_2 = C\exp(ik_2x) + D\exp(-ik_2x) \qquad\qquad 0 < x < a$$

$$\phi_3 = F\exp(ik_1x) \qquad\qquad x > a$$

Condiciones de contorno:

$$A + B = C + D$$
$$ik_1A - ik_1B = ik_2C - ik_2D$$
$$C\exp(ik_2a) + D\exp(-ik_2a) = F\exp(ik_1a)$$
$$ik_2C\exp(ik_2a) - ik_2D\exp(-ik_2a) = ik_1F\exp(ik_1a)$$

Son tantas ecuaciones, que conviene la resolución matricial:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ ik_1 & ik_2 & -ik_2 & 0 \\ 0 & \exp(ik_2 a) & \exp(-ik_2 a) & -\exp(ik_1 a) \\ 0 & ik_2\exp(ik_2 a) & -ik_2\exp(-ik_2 a) & -ik_1\exp(ik_1 a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ C \\ D \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ ik_1 A \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Despejando:

$$F = \frac{4k_1k_2\exp(-ik_1a)}{4k_1k_2\cos(k_2a) - 2\left(k_1^2 + k_2^2\right)\sin(k_2a)\cdot i} A$$

$$B = -\frac{2\left(k_1^2 - k_2^2\right)\sin(k_2a)\cdot i}{4k_1k_2\cos(k_2a) - 2\left(k_1^2 + k_2^2\right)\sin(k_2a)\cdot i} A$$

Entonces:

$$|F| = \frac{4k_1k_2}{\sqrt{16k_1^2k_2^2\cos^2(k_2a) + 4\left(k_1^2 + k_2^2\right)^2\sin^2(k_2a)}}|A|$$

$$|B| = \frac{2\left|k_1^2 - k_2^2\right|\cdot\left|\sin(k_2a)\right|}{\sqrt{16k_1^2k_2^2\cos^2(k_2a) + 4\left(k_1^2 + k_2^2\right)^2\sin^2(k_2a)}}|A|$$

$$T = \frac{j_{TR}}{j_{INC}} = \frac{\frac{\eta k_1}{m}|F|^2}{\frac{\eta k_1}{m}|A|^2} = \frac{16k_1^2k_2^2}{16k_1^2k_2^2\cos^2(k_2a) + 4\left(k_1^2 + k_2^2\right)^2\sin^2(k_2a)}$$

$$R = -\frac{j_{REF}}{j_{INC}} = -\frac{\left[-\frac{\eta k_1}{m}|B|^2\right]}{\frac{\eta k_1}{m}|A|^2} = \frac{4\left(k_1^2 - k_2^2\right)^2\sin^2(k_2a)}{16k_1^2k_2^2\cos^2(k_2a) + 4\left(k_1^2 + k_2^2\right)^2\sin^2(k_2a)}$$

Y está presente la posibilidad de resonancia, con T=1, cuando $\cos(k_2a)=\pm 1$.

$E<V_0$:

$$\phi_1 = A\exp(ik_1x) + B\exp(-ik_1x) \qquad x < 0$$

$$\phi_2 = C\exp(\alpha_2 x) + D\exp(-\alpha_2 x) \qquad 0 < x < a$$

$$\phi_3 = F\exp(ik_1x) \qquad x > a$$

Llegar a:

$$T = \frac{j_{TR}}{j_{INC}} = \frac{\frac{\hbar k_1}{m}|F|^2}{\frac{\hbar k_1}{m}|A|^2} = \frac{16k_1^2\alpha_2^2}{16k_1^2\alpha_2^2\cosh^2(\alpha_2 a) + 4(k_1^2 - \alpha_2^2)^2\sinh^2(\alpha_2 a)}$$

$$R = -\frac{j_{REF}}{j_{INC}} = -\frac{\left[-\frac{\hbar k_1}{m}|B|^2\right]}{\frac{\hbar k_1}{m}|A|^2} = \frac{4(k_1^2 + \alpha_2^2)^2\sinh^2(\alpha_2 a)}{16k_1^2\alpha_2^2\cosh^2(\alpha_2 a) + 4(k_1^2 - \alpha_2^2)^2\sinh^2(\alpha_2 a)}$$

Aquí no hay posibilidad de resonancia.

$E=V_0$: ver respuesta del ejercicio 10.

c) Delta de Dirac: ver respuesta del ejercicio 8.

12) Soluciones en las tres regiones:

$$\phi_1 = A\exp(\alpha x) \qquad x < -a/2$$

$$\phi_2 = B\cos(kx) + C\sin(kx) \qquad -a/2 < x < a/2$$

$$\phi_3 = D\exp(-\alpha x) \qquad x > a/2$$

Condiciones de contorno:

$$A\exp(-\alpha a/2) = B\cos(ka/2) - C\sin(ka/2)$$

$$\alpha A\exp(-\alpha a/2) = kB\sin(ka/2) + kC\cos(ka/2)$$

$$B\cos(ka/2) + C\sin(ka/2) = D\exp(-\alpha a/2)$$

$$-kB\sin(ka/2) + kC\cos(ka/2) = -\alpha D\exp(-\alpha a/2)$$

Si se resuelve matricialmente:

$$\begin{pmatrix} \exp(-\alpha a/2) & -\cos(ka/2) & \sin(ka/2) & 0 \\ \alpha\exp(-\alpha a/2) & -k\sin(ka/2) & -k\cos(ka/2) & 0 \\ 0 & \cos(ka/2) & \sin(ka/2) & -\exp(-\alpha a/2) \\ 0 & -k\sin(ka/2) & k\cos(ka/2) & \alpha\exp(-\alpha a/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cuya solución es que el determinante Δ de la matriz de la izquierda sea cero:

$$\Delta = 2\exp(-\alpha a)\cdot\left[\alpha k\cos^2\left(\frac{ka}{2}\right)-\alpha k\sin^2\left(\frac{ka}{2}\right)+\left(\alpha^2-k^2\right)\sin\left(\frac{ka}{2}\right)\cos\left(\frac{ka}{2}\right)\right]=0$$

Dividiendo por $\cos^2(ka/2)$ (por supuesto, luego de comprobar que $\cos(ka/2)=0$ no es solución de la ecuación anterior):

$$-\alpha k\tan^2\left(\frac{ka}{2}\right)+\left(\alpha^2-k^2\right)\tan\left(\frac{ka}{2}\right)+\alpha k=0$$

De donde salen las condiciones:

$$\tan\left(\frac{ka}{2}\right)=\frac{\alpha}{k} \qquad\qquad -\cot\left(\frac{ka}{2}\right)=\frac{\alpha}{k}$$

Cuando $V_0\to\infty$, ¿a cuánto tiende α? Resolver ese caso.

13) La función de onda es:

$$\Psi(x,t) = 0.5\sin\left(\frac{\pi}{a}\,x\right)\exp(-i\,E_1\,t/\hbar)+1\sin\left(\frac{2\pi}{a}\,x\right)\exp(-i\,E_2\,t/\hbar)$$

Donde E_1 y E_2 son las energías correspondientes a cada uno de los estados:

$$E_1 = \frac{h^2}{8\,m\,a^2} \qquad\qquad E_2 = 4\,E_1 = \frac{h^2}{2\,m\,a^2}$$

Para hallar el módulo de Ψ al cuadrado, primero escribimos su conjugado:

$$\Psi^*(x,t) = 0.5\sin\left(\frac{\pi}{a}\,x\right)\exp(i\,E_1\,t/\hbar)+1\sin\left(\frac{2\pi}{a}\,x\right)\exp(i\,E_2\,t/\hbar)$$

Ahora:

$$|\Psi(x,t)|^2 = \Psi(x,t)\,\Psi^*(x,t)$$

$$|\Psi(x,t)|^2 = 0.25\,\sin^2\left(\frac{\pi}{a}\,x\right)+1\,\sin^2\left(\frac{2\pi}{a}\,x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{a}\,x\right)\sin\left(\frac{2\pi}{a}\,x\right)\cos\left[\frac{(E_2-E_1)\,t}{\hbar}\right]$$

A continuación se grafica la función obtenida, para $\frac{(E_2-E_1)t}{\hbar}=0,\frac{\pi}{2}$, $y\ \pi$, es decir, se muestra cómo evoluciona la densidad de probabilidad de encontrar a la partícula, a medida que transcurre el tiempo. El pozo es de ancho de 1nm, y las funciones $\phi(x)$ no fueron normalizadas.