RESPUESTAS GUÍA Nº 5 AÑO 2019

1) De los datos del enunciado, podemos calcular:

$$\mu = \delta_{Cu}.A_T = \delta_{Cu}.\pi.r^2 = 8.4\ g/cm^3\,.\pi.(1\,mm)^2 = 0.02639\ Kg/m$$

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{10000\ N}{0.02639\ Kg/m}} = 615.58\ {}^{m}/_{s}$$

a) Ver gráficos en el inciso c).

$L = {}^{\lambda_1}/_2\ ;\ f_1 = c/\lambda_1 = \ 307.79\,Hz$

$L = \lambda_2\ ;\ f_2 = c/\lambda_2 = \ 615.58\,Hz$

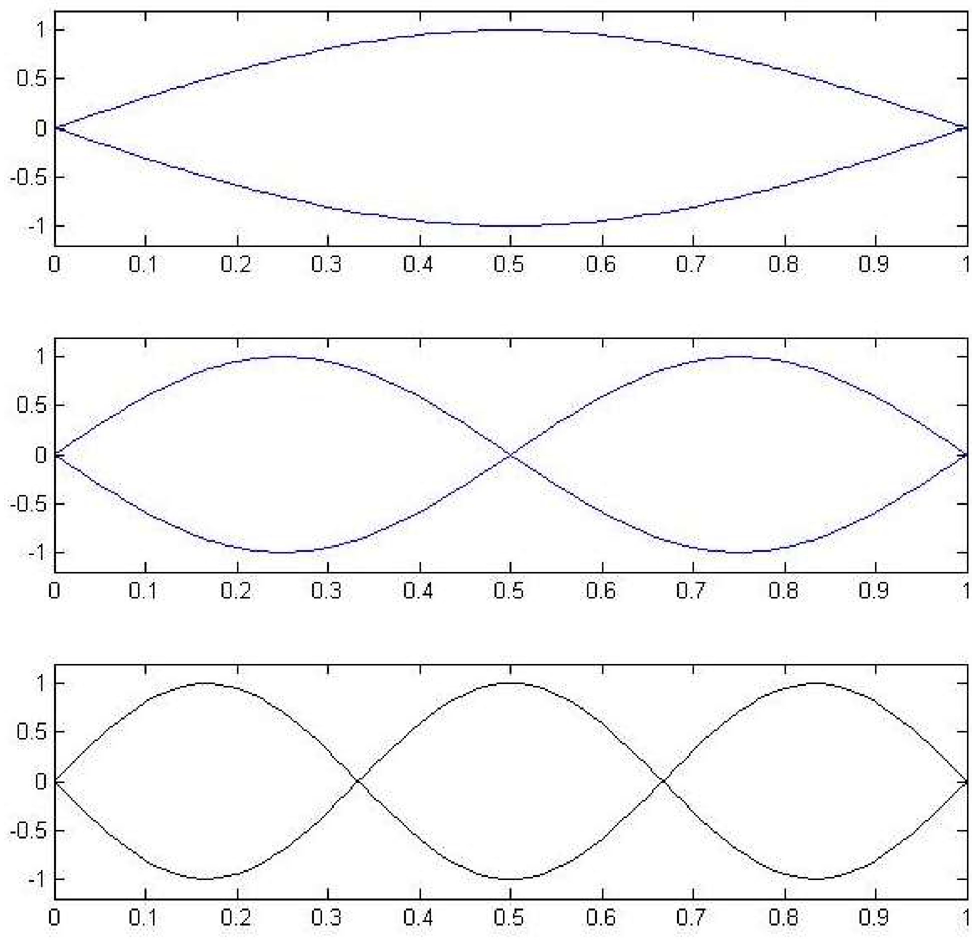
$L = {}^{3\lambda_3}/_2\ ;\ f_3 = c/\lambda_3 = 923.37\,Hz$

b) $\lambda_1 = 2L = 2\,m$

$\lambda_2 = L = 1\,m$

$\lambda_3 = \dfrac{2L}{3} = 0.66\,m$

c)



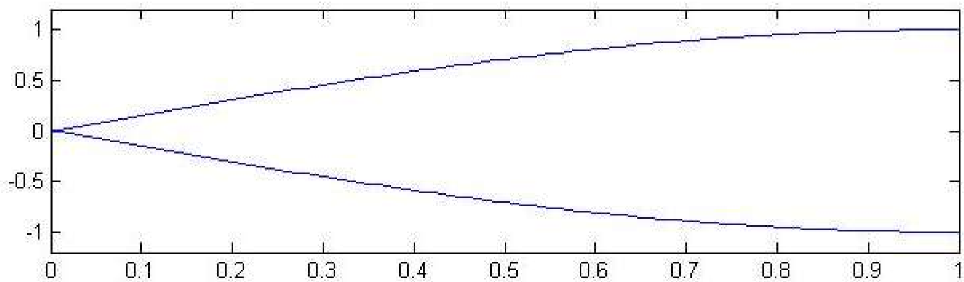
d) $\phi_1 = A.\sin(k_1 x)\,.\cos(\omega_1 t + \delta_0)$

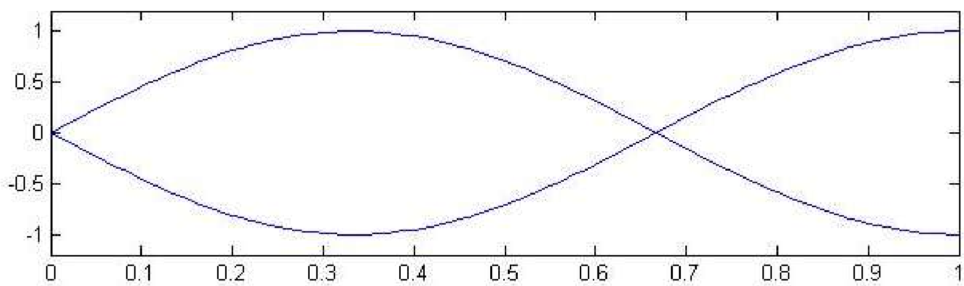
$\phi_2 = A.\sin(k_2 x)\,.\cos(\omega_2 t + \delta_0)$

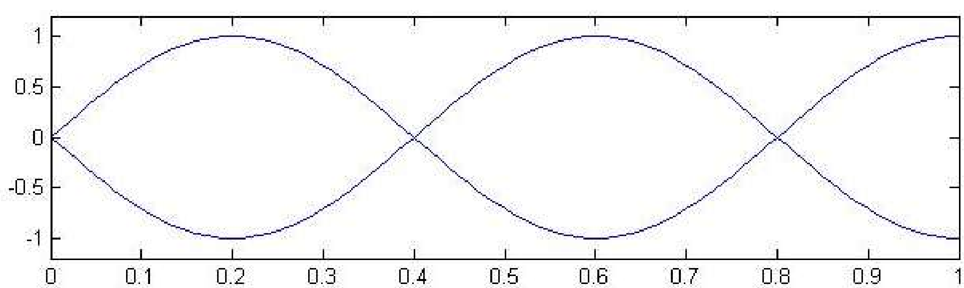
$\phi_3 = A.\sin(k_3 x)\,.\cos(\omega_3 t + \delta_0)$

Donde se usó sin(kx) por existir un nodo de desplazamiento en x=0. No hay datos en este ejercicio que permitan determinar el valor de δ_0.

2) Los 3 primeros modos de oscilación son los siguientes:







Las longitudes de onda serán:

$$\lambda_1 = 4.L$$
$$\lambda_2 = \frac{4.\mathrm{L}}{3}$$
$$\lambda_3 = \frac{4.\mathrm{L}}{5}$$

Discuta cómo puede realizarse la cuerda tensa y libre en un extremo.

3) Si tenemos un tubo de longitud L y decimos que el extremo cerrado está en $x = 0$ y el abierto es $x = L$, entonces por las condiciones de frontera:

$$\phi(0) = 0 \;\Rightarrow\; \phi(x,t) = \phi_{máx}\ \sin(kx)\ \cos(\omega t + \delta_0)$$

$$p(L) = 0$$

Por lo tanto, si $p(L) = 0$, entonces hay un vientre de ϕ en x=L. Entonces $\sin(kL) = \pm 1$, lo que ocurre cuando se cumple la condición:

$$kL = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$$

Si reemplazamos k y despejamos, obtenemos:

$$\lambda = \frac{4L}{2n+1}$$

Para el tubo abierto en ambos extremos, si realizamos un análisis similar con $p(0)$ y $p(L)$, habiendo nodos de sobrepresión en x=0 y x=L, llegamos a que la condición que debe cumplirse es:

$$kL = n\pi \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$$

De donde se despeja:

$$\lambda = \frac{2L}{n}$$

4) Del análisis del ejercicio 3) sale que:

a) $\lambda_0 = 2L$, por lo que

$$f_0 = \frac{c}{\lambda_0} = 283.33\ Hz$$

Para los armónicos tenemos que usar $\lambda_1 = L$ y $\lambda_2 = {}^{2L}/_{3}$, reemplazando:

$$f_1 = \frac{c}{\lambda_1} = 566.67\ Hz$$

$$f_2 = \frac{c}{\lambda_2} = 850\ Hz$$

b) $\lambda_0 = 4L$, por lo que

$$f_0 = \frac{c}{\lambda_0} = 141.67\ Hz$$

Para los armónicos tenemos que usar $\lambda_1 = {}^{4L}/_{3}$ y $\lambda_2 = {}^{4L}/_{5}$, reemplazando:

$$f_1 = \frac{c}{\lambda_1} = 425\ Hz$$

$$f_2 = \frac{c}{\lambda_2} = 708.33\ Hz$$

5) El análisis de la relación entre λ y L es similar al de los ejercicios 3) y 4), con la diferencia que en este caso λ es constante y lo que se varía es la longitud del tubo L. De aquí sale que las longitudes serán:

$$L_n = \frac{(2n+1)\lambda}{4}$$

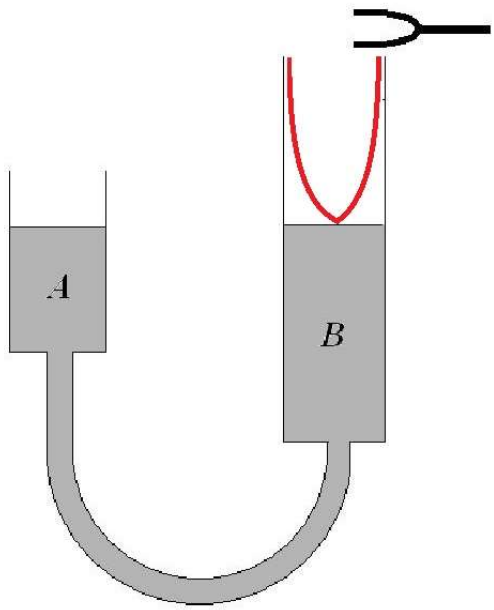
Reemplazando, obtenemos

$$L_1 = \frac{\lambda}{4} = 0.332\ m$$

$$L_2 = \frac{3\lambda}{4} = 0.996\,m$$

$$L_3 = \frac{5\lambda}{4} = 1.66\,m$$

El diagrama de amplitud cuando tenemos L_1 es el siguiente:



6) Las posiciones de mínima intensidad, para el intervalo $0 \leq x \leq 0.75\,m$, están dadas por la siguiente ecuación:

$$\phi_R(x,t) = \phi_1(x,t) - \phi_2(x,t) = A.\cos(kx - \omega t) - A\ \cos[-k(x - 0.75) - \omega t]$$

Sumando fasorialmente y desarrollando:

$$\phi_R(x,t) = 2A\cos(kx)\cos(\omega t)$$

De donde la sobrepresión es:

$$p(x,t) = \frac{2Ak}{K_{ad}}\ \sin(kx)\cos(\omega t)$$

Y la velocidad:

$$v(x,t) = -2A\omega\cos(kx)\sin(\omega t)$$

Si interpretamos a la intensidad como promedio del módulo de S(x,t), entonces los puntos de intensidad mínima (I=0) serán aquellos con S=0.

$$S = pv = -\frac{4A^2k\omega}{K_{ad}}\sin(kx)\cos(kx)\sin(\omega t)\cos(\omega t)$$

$$S = pv = -\frac{A^2k\omega}{K_{ad}}\sin(2kx)\ \sin(2\omega t)$$

Las posiciones de los mínimos de la función serán cuando $\sin(2kx) = 0$, o lo que es lo mismo $2kx = n\pi$, despejando nos queda:

$$x = \frac{n\lambda}{4}$$

Las posiciones de los mínimos, siguiendo el criterio de S=0, son:

$$x_0 = 0\ m\ ;\ x_1 = 0.125\ m\ ;\ x_2 = 0.25\ m\ ;$$
$$x_3 = 0.375\ m\ ;\ x_4 = 0.5\ m\ ;\ x_5 = 0.625\ m\ ;\ x_6 = 0.75\ m$$

También puede interpretarse que los puntos de intensidad mínima son aquellos en los que, colocado un detector de desplazamiento, éste perciba amplitud nula. Entonces, si el detector percibe desplazamiento, habrá intensidad nula en los puntos de desplazamiento nulo:

$$kx = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

$$x = \frac{(1+2n)\lambda}{4}$$

Las posiciones de los mínimos, usando un detector de desplazamiento, son:

$$x_1 = 0.125\ m\ ;\ x_2 = 0.375\ m\ ; x_3 = 0.625\ m$$

Si en cambio el detector percibe sobrepresión, los puntos de intensidad mínima serán aquellos de sobrepresión mínima:

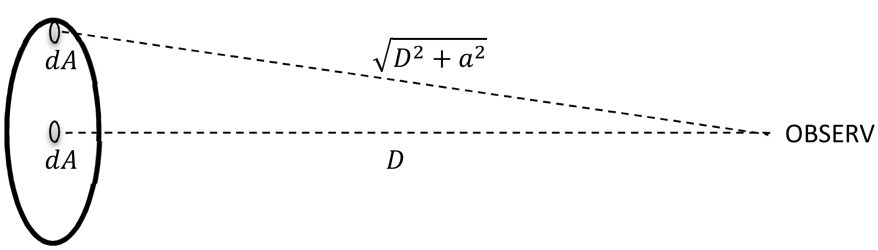
$$kx = n\pi$$

$$x = \frac{n\lambda}{2}$$

Las posiciones de los mínimos, usando un detector de sobrepresión, son:

$$x_0 = 0\ m\ ;\ x_1 = 0.25\ m\ ; x_2 = 0.5\ m\ ; x_3 = 0.75\ m$$

7) El observador, si es lejano, recibe siempre un máximo con ángulo cero. Para que haya un máximo con ángulo cero, las contribuciones de campo eléctrico de todos los diferenciales de área de la abertura, sobre el observador, deben estar en fase. Por lo tanto, deben diferir en un ángulo muy inferior a π radianes.



$$\cos\left(k\sqrt{D^2 + a^2} - \omega t\right) \cong \cos(kD - \omega t)$$

$$\left(k\sqrt{D^2+a^2}-\omega t\right)-(kD-\omega t)\ll\pi$$

$$k\sqrt{D^2+a^2}-kD\ll\pi$$

Llamando $x=a^2$, se puede hacer un desarrollo de Taylor alrededor de $x=0$. Quedando:

$$k\left(D+\frac{1}{2D}a^2\right)-kD\ll\pi$$

Llegándose a:

$$D\gg\frac{a^2}{\lambda}$$

8) Los mínimos se producen para $\sin\theta_n=n\lambda/a$, donde n es el orden del mínimo

$$\theta_1=\arcsin\frac{\lambda}{a}=0.3398\,rad=19°28'16''$$

$$\theta_2=\arcsin\frac{2\lambda}{a}=0.7297\,rad=41°48'37''$$

9) Ídem ejercicio 7)

a) $\theta_1=\arcsin\frac{\lambda}{a}=6\times10^{-4}\,rad=0°2'3.76''$

b) $\theta_1=\arcsin\frac{\lambda}{a}=6\times10^{-3}\,rad=0°20'37.6''$

c) $\theta_1=\arcsin\frac{\lambda}{a}=0.06\,rad=3°26'23.33''$

¿Para qué caso se percibe menos difracción?

10) $\lambda=a\ \sin\theta_1=5\,cm\ \text{ sen }37°=3\,cm$

11) De los ejercicios anteriores sabemos que los mínimos de difracción se encuentran en

$$\sin\theta_n=\frac{n\lambda}{a}$$

Los máximos de interferencia se encuentran en

$$\sin\theta_m=\frac{m\lambda}{d}$$

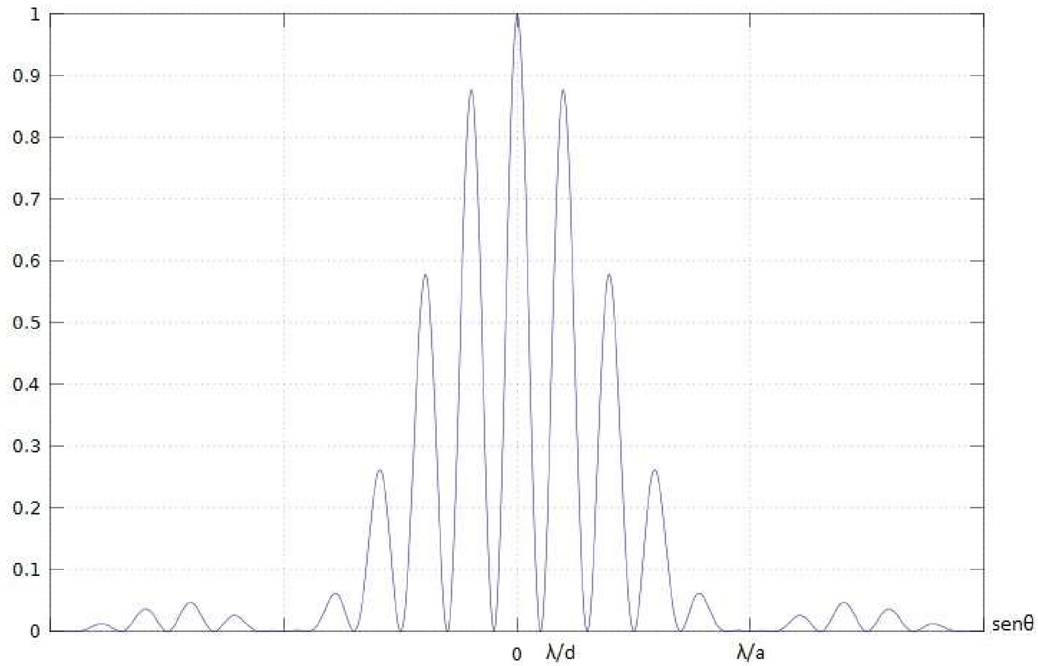
Por lo tanto, si el 5º máximo de interferencia coincide con el primer mínimo de difracción $\theta_m=\theta_n$ cuando $m=5$ y $n=1$, reemplazando

$$\frac{5\lambda}{d}=\frac{\lambda}{a}$$

Despejamos a:

$$a = \frac{d}{5} = 2 \times 10^{-5}\ m$$

El diagrama de interferencia-difracción es el siguiente:



Nota: el eje vertical representa intensidad, donde en el ejemplo del gráfico $I_{máx} = 1$

Del diagrama podemos concluir que se ven 4 franjas brillantes (máximos de interferencia) a cada lado del máximo principal, por lo que tenemos en total 9 franjas brillantes.

12) Cuando se cubre una rendija de los extremos, para el primer máximo obtenemos

$$\sin 0.6° = \frac{\lambda}{d}$$

a) Al cubrir la rendija central, la distancia entre rendijas es $d' = 2.d$, entonces el primer máximo se encuentra en

$$\sin \theta_1' = \frac{\lambda}{d'} = \frac{\lambda}{2d} = \frac{\sin 0.6°}{2}$$

Despejando

$$\theta_1' = \arcsin\left(\frac{\sin 0.6°}{2}\right) = 0.3°$$

b) Ahora debemos hallar el número de orden m tal que $\theta_m' = \theta_4$

$$\sin \theta_4 = \frac{4\lambda}{d}$$

$$\sin\theta'_m = \frac{m\lambda}{d'}$$

Igualando ambas expresiones:

$$\frac{m\lambda}{d'} = \frac{4\lambda}{d}$$
$$\frac{m}{2d} = \frac{4}{d}$$

Entonces:

$$m = 8$$

13) El 1er máximo visible será un máximo principal de interferencia, por lo que cumple con la ecuación:

$$a\ \sin\theta = n\,\lambda$$

En este caso será $\mathrm{n} = 1$, por lo tanto queda:

$$\lambda = a\ \ \sin\theta \quad (1)$$

Si llamamos y a la distancia que hay entre el máximo central de interferencia y el siguiente máximo y L a la distancia desde la diapositiva a la pantalla, entonces:

$$\tan\theta = \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{L}}$$

Podemos utilizar la siguiente aproximación válida para $\theta \ll 1$:

$$\sin\theta \approx \theta \approx \tan\theta$$

Reemplazando en (1), queda:

$$\lambda = \mathrm{a}\ \tan\theta = \mathrm{a}\ \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{L}}$$

Como $\mathrm{a} = {}^{1\ \mathrm{mm}}/_{300} = 3.\hat{3}\ \mu\mathrm{m}$, $\mathrm{y} = 48{,}5\ \mathrm{cm}$ y $\mathrm{L} = 3\ \mathrm{m}$, nos queda:

$$\lambda = \frac{\mathrm{a}\ .\ \mathrm{y}}{\mathrm{L}} = \frac{3{,}33\ .\ 10^{-6}\mathrm{m}\ .\ 0{,}485\ \mathrm{m}}{3\ \mathrm{m}} = 538{,}88\ \mathrm{nm}$$

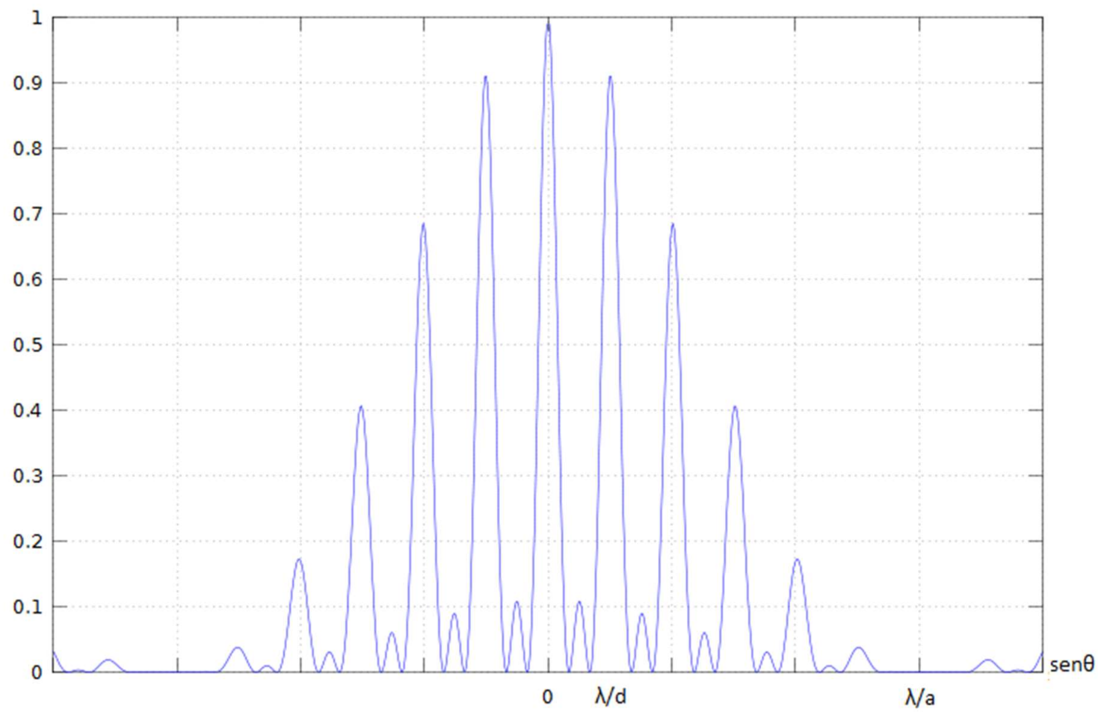
Verificando que se cumple la aproximación usada para $\theta \ll 1$

$$\theta = \arctan\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{L}} = 9°11'0{,}1''$$
$$\mathrm{sen}\,\theta = 0{,}15959$$
$$\lambda = \mathrm{a}\,.\,\mathrm{sen}\,\theta = 531{,}98\ \mathrm{nm} \cong 532\ nm$$

14) Por las ecuaciones de interferencia y difracción sabemos que:

$$\mathrm{d}\ \ \mathrm{sen}\,\theta = \mathrm{m}\,\lambda \quad (1)$$
$$\mathrm{a}\ \ \mathrm{sen}\,\theta = \mathrm{n}\,\lambda \quad (2)$$

El diagrama de interferencia y difracción es el siguiente:



Tenemos como datos $\lambda = 633\,\mathrm{nm}$ y $\mathrm{n} = 1$, por lo tanto, si despejamos a de (1) y reemplazamos, obtenemos:

$$\mathrm{a} = \frac{\mathrm{n}\,\lambda}{\mathrm{sen}\,\theta} = \frac{1\ .\ 633.10^{-9}}{\mathrm{sen}\,1°44'30''} = 20{,}827\ \mu\mathrm{m}$$

Como el sexto máximo de interferencia coincide con el mínimo de difracción, entonces si reemplazamos con $\mathrm{m} = 6$ en (2), calculamos d:

$$\mathrm{d} = \frac{\mathrm{m}\,\lambda}{\mathrm{sen}\,\theta} = \frac{6\ .\ 633.10^{-9}}{\mathrm{sen}\,1°44'30''} = 124{,}962\ \mu\mathrm{m}$$

15)

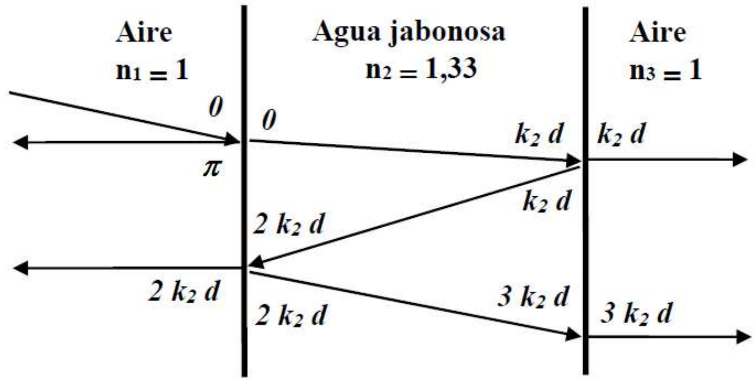
a) Como sabemos $c_o = \lambda_o.f$ y $c_n = \lambda_n.f$, cuando cambiamos de medio la frecuencia de la onda no se modifica y la relación entre las velocidades de propagación y el índice de refracción es:

$$n = \frac{c_o}{c_n} = \frac{\lambda_o.f}{\lambda_n.f} = \frac{\lambda_o}{\lambda_n}$$

Despejando:

$$\lambda_n = \frac{\lambda_o}{n}$$

b) Para hallar los valores de espesor de la película, graficamos los rayos transmitidos y reflejados



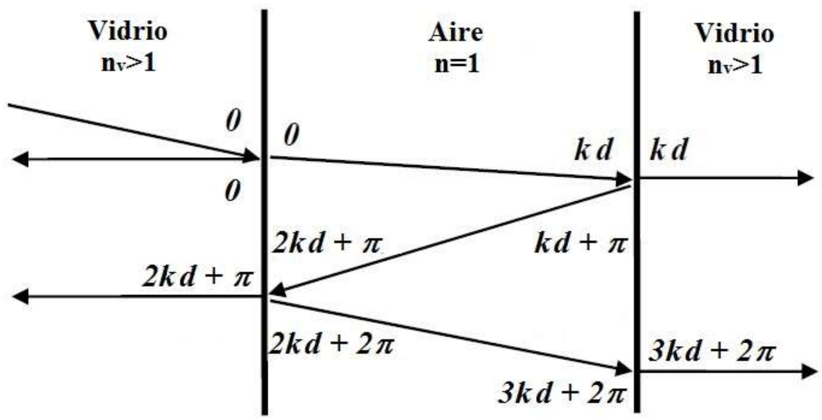
Como debemos analizar la película a la reflexión y además esta debe ser máxima, entonces los rayos que se ven, el reflejo del incidente y el que sale de la lámina, deben estar en fase, es decir:

$$\Delta\phi = 2k_2 d - \pi = 2m\pi \;\; ; \;\; m = \{0,1,\cdots,N\}$$

Reemplazando y despejando, obtenemos los probables espesores de la lámina:

$$d = \frac{(2m+1).\lambda_o}{4.n_L} = \frac{(2m+1).\,600\;nm}{4\;.\,1{,}33}$$

16) Si realizamos el análisis de los rayos transmitidos y reflejados para una sección de la cuña donde supondremos un espesor d constante, el diagrama de los rayos es el siguiente:



Como miramos la cuña desde el lado transmitida, tenemos que analizar las fases de los rayos en función del espesor:

$$\Delta\phi = 3kd + 2\pi - kd = 2kd + 2\pi$$

Cuando $d \ll \pi/_{2k}$, estaremos en la zona cercana al punto de contacto entre ambos vidrios y se verá una franja brillante, ya que $\Delta\phi \approx 2\pi$. Luego, a medida que $d \approx \pi/_{2k}$ se verá una franja oscura, dado que $\Delta\phi \approx 3\pi$ y así sucesivamente. Las franjas brillantes se verán cuando

$$\Delta\phi = 3kd + 2\pi - kd = 2kd + 2\pi = 2m\pi \;\; ; m = \{1,2,\cdots,400\} \;\; (1)$$

Donde m será el número de franja brillante contada desde el punto con espesor $d = 0$. Si reemplazamos y despejamos en (1)

$$d = \frac{(m-1)\lambda}{2}$$

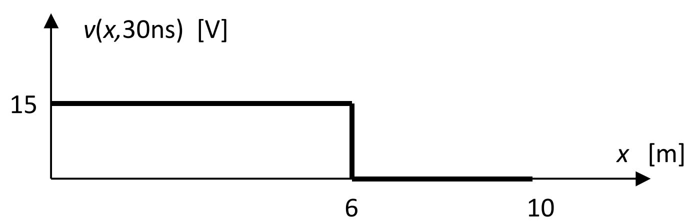
El espesor del papel será:

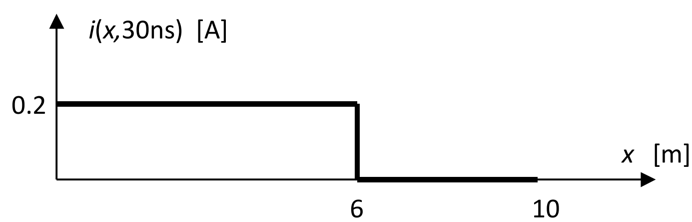
$$e = \frac{(400-1).\lambda}{2} = 9.975 \times 10^{-5}\ m \approx 0.1\ mm$$

17) Ídem al ejercicio 15)

$$d = \frac{(m-1)\lambda}{2} = \frac{(19-1).590\ nm}{2} = 5.31 \times 10^{-6}\ m$$

18) a) La onda se propagó una distancia $\Delta x = c\ \Delta t = 6$m. Por lo tanto, aún no llegó al extremo derecho de la línea. Entonces, para el intervalo $0 \le x < 6$, el voltaje es el de la batería, 15V, y la corriente es la de la batería dividido Z_0, es decir 0.2A.





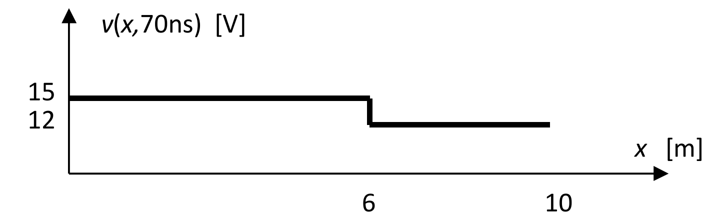
b) La onda se propagó una distancia $\Delta x = c\ \Delta t = 14$m. Entonces, llegó a $x = 10$m, y allí se reflejó. La onda reflejada llegó hasta $x = 6$m. Entonces, en el intervalo $0 \le x < 6$ solo existe la onda incidente, que llamaremos $V_1 = 15$V, $I_1 = 0.2$A (ver inciso (a)). En cambio, en el intervalo $6 < x < 10$ también existe la onda reflejada V_2, con la corriente asociada I_2. Es decir, en ese intervalo, $V = V_1 + V_2$ e $I = I_1 + I_2$, con $V_1 = 75 I_1$ (onda hacia $+x$) y $V_2 = -75 I_2$ (onda hacia $-x$). Pero la onda reflejada se produjo porque el extremo derecho impuso la condición $V = I\ R_L = I\ 50$. Es decir:

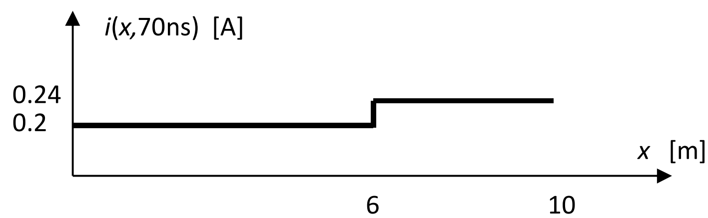
$$\frac{V_1 + V_2}{I_1 + I_2} = 50$$

$$\frac{15 - I_2 75}{0.2 + I_2} = 50$$

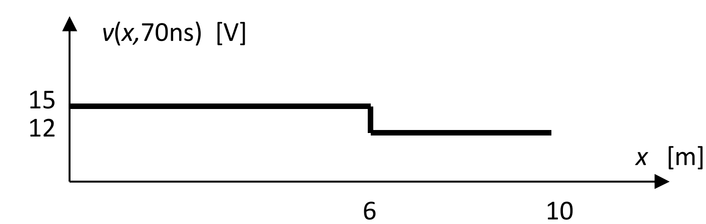
Resultando $I_2 = 0.04$A y $V_2 = -3$V. Entonces, en el instante $t = 70$ns, en el intervalo $6 < x < 10$, $V = V_1 + V_2 = 12$V e $I = I_1 + I_2 = 0.24$A.

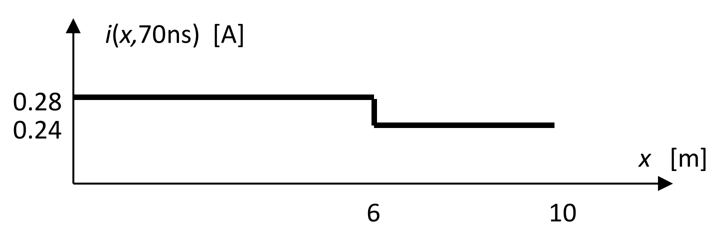
Nótese que si $R_L = Z_0$, no se produce la onda reflejada V_2 , I_2. Es por esto que siempre se procura que $R_L = Z_0$, para que no haya reflexiones indeseadas.





c) La onda se propagó una distancia $\Delta x = c\,\Delta t = 26\text{m}$. Es decir que llegó a $x = 10\text{m}$, y allí se reflejó, y esta onda reflejada llegó a $x = 0$, donde hubo otra reflexión y se generó la onda V_3, y luego la onda avanzó hasta $x = 6\text{m}$. En resumen, en el intervalo $0 \leq x < 6$, la superposición de ondas es $V = V_1 + V_2 + V_3$, $I = I_1 + I_2 + I_3$, con $V_3 = I_3\,75$, mientras que en el intervalo $6 < x < 10$, la onda es $V = V_1 + V_2 = 12\text{V}$, $I = I_1 + I_2 = 0.24\text{A}$. Cuando la onda se refleja en $x = 0$, el extremo izquierdo impone la condición $V = V_1 + V_2 + V_3 = 15\text{V}$, a causa de la batería sin resistencia interna. Entonces $V_3 = 3\text{V}$ e $I_3 = 0.04\text{A}$. Entonces, en el intervalo $0 \leq x < 6$, $V = V_1 + V_2 + V_3 = 15\text{V}$ e $I = I_1 + I_2 + I_3 = 0.28\text{A}$.





A medida que se vayan produciendo sucesivas reflexiones, el voltaje va a tender a 15V en toda la línea, y la corriente va a tender a su valor de estado estacionario, que es $\frac{15}{R_L} = 0.3\text{A}$.