Respuestas de la guía de problemas capítulo 4

1. Objetivos

1. Aprender cómo se suman las ondas coherentes e incoherentes.
2. Sumar ondas armónicas empleando fasores.
3. Emplear patrones de interferencia para reconocer estructuras.

2. Suma de Mensajes

1. La Fig.1 muestra un pulso de onda que se mueve hacia la derecha en una cuerda. Hacer un esquema de otro pulso que se mueva hacia la izquierda y que pueda anular completamente el primer pulso en algún instante. En el instante de la anulación completa, indicar con flechas la dirección de la velocidad instantánea de los segmentos de cuerda. ¿Qué ocurre con la energía en el momento de la anulación?

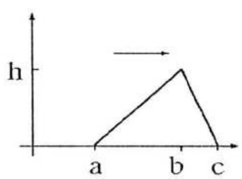


Figura 1.

Para anular el pulso se necesita uno igual e invertido.

Cuando los dos pulsos están superpuestos el segmento ab tiene velocidad negativa:

$$v = -\frac{2\,h\,c_0}{b-a}$$

Donde c_0 es la velocidad de propagación (demuestre el valor de v)

Y el segmento bc tiene velocidad positiva:

$$v = \frac{2\,h\,c_0}{c-b}$$

En el instante de la anulación la cuerda se ve como si no hubiera pulso alguno, es decir que la perturbación ϕ es nula en toda la cuerda en ese momento. Por lo tanto la energía de tracción $u_{trc} = \frac{1}{2}T\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 = 0$

¿A dónde se fue toda la energía? Ahora es puramente cinética. La energía total de la onda en Joules, en el momento de la anulación, es:

$$U = 2\,\mu\,h^2\,c_0^2\,\left(\frac{1}{b-a}+\frac{1}{c-b}\right)$$

Y cuando los pulsos estaban separados la energía era parte potencial y parte cinética, dando lugar al mismo U total en Joules que en el momento de la anulación.

2. En una cuerda viajan dos mensajes dados por:

$\varphi_1(x,t) = A\cos(3x - 2t)$ (1)
$\varphi_2(x,t) = 2A\cos(3x - 2t + \pi/2)$ (2)

a) Sumar ambos mensajes, empleando las propiedades trigonométricas siguientes:

$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$ (3)
$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$ (4)

b) Calcule la energía por unidad de longitud en la cuerda y verifique que no es igual a la suma de las energías por unidad de longitud de ambas ondas.

c) Calcule la potencia $P(x,t)$ que se transmite en la cuerda y verifique que no es igual a la suma de las potencias de las dos ondas.

La suma queda:

$$\varphi_T = A\sqrt{5}\cos(3x - 2t + \tan^{-1}2)$$

Las energías por unidad de longitud quedan:

$$u_1 = 4\mu A^2\sin^2(3x-2t)$$

$$u_2 = 16\mu A^2\sin^2\left(3x-2t+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$u_T = 20\mu A^2\sin^2(3x-2t+\tan^{-1}2)$$

Y las potencias:

$$P_1 = 6TA^2\sin^2(3x-2t)$$

$$P_2 = 24TA^2\sin^2\left(3x-2t+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$P_T = 30TA^2 \sin^2(3x - 2t + \tan^{-1} 2)$$

3. Fasores

3. Usando fasores, realizar las siguientes sumas, expresando el resultadocomo una función de un único coseno de (ωt):

(5) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega t\right) + \cos(-\omega t) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \omega t\right)$

(6) $\cos(2 - \omega t) - \cos(\pi - \omega t) = 1.08\cos(1.00 - \omega t)$

(7) Antes de realizar la suma fasorial, el factor (ωt) debe tener el mismo signo en todos los cosenos. Entonces se invierte el argumento de uno de los cosenos, cosa que puede hacerse dado que la función coseno es par. Luego se suma fasorialmente:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + \omega t\right) + \cos(1.2 - \omega t) = 1.09\cos(0.21 - \omega t)$$

(8) Antes de realizar la suma fasorial, la función seno debe ser convertida en coseno, usando la equivalencia sin(x)=cos(π/2-x). Luego se suma fasorialmente, y el resultado es:

$$sin(\omega t) + cos(3 - \omega t) = 1.51\, cos(2.29 - \omega t)$$

(9) $2\, cos(0.2 - \omega t) + cos(0.1 - \omega t) = 3.00\, cos(0.17 - \omega t)$

(10) $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \omega t\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} - \omega t\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \omega t\right) = 1.98\cos(-0.65 - \omega t)$

(11) $3\, sin(\omega t) + 2\, cos(1 - \omega t) + cos(0.5 + \omega t) = 4.64\, cos(1.13 - \omega t)$

(12) $2\, sin(\omega t + 0.4) - cos(\omega t - 0.1) = 1.76\, cos(1.69 - \omega t)$

(13) $cos(kx - \omega t) + cos(kx - \omega t + 0.2) = 1.99\, cos(kx - \omega t + 0.10)$

(14) $cos(kx - \omega t - 2) - cos(kx - \omega t + 0.5) = 1.90\, cos(kx - \omega t - 2.32)$

(15) $cos(kx - \omega t) + 0.5\, cos(kx - \omega t - 1) = 1.34\, cos(kx - \omega t - 0.32)$

(16) $2\, cos(kx - \omega t) + 3\, cos(kx - \omega t + 1.2) + cos(kx - \omega t - 1.5) =$
$= 3.63\cos(kx - \omega t + 0.52)$

(17) $cos(kx - \omega t + 2) - sin\left(kx - \omega t - \frac{\pi}{6}\right) = 1.78\, cos(kx - \omega t + 1.52)$

(18) La suma de fasores exponenciales forma una serie geométrica de la forma S = 1 + α + α^2 + … + α^N que equivale a (1 - α^{N+1}) / (1 - α). Usando esto, y usando que sin(β) = [exp(iβ) - exp(-iβ)] /(2i), se llega al resultado:

$$cos(kx-\omega t)+cos[(k+\delta k)x-(\omega+\delta\omega)t]+\ cos[(k+2\,\delta k)x-(\omega+2\,\delta\omega)t]=$$

$$=\frac{sin\left[\frac{3}{2}(\delta k\,x\ -\ \delta\omega\,t)\right]}{sin\left[\frac{1}{2}(\delta k\,x\ -\ \delta\omega\,t)\right]}cos[(k+\ \delta k)x-\ (\omega+\delta\omega)t]$$

(19) Usando que cos (β) = [exp(iβ) + exp(-iβ)] /2, se llega al resultado:

$$\cos(kx-\omega t)+\ \cos(kx+\omega t)=2\,cos(kx)\,cos(\omega t)$$

(20) Antes de operar, usar la paridad del coseno para que el primer término: cos(kx+ωt) quede con el tiempo negativo: cos(-kx-ωt)

$$\cos(kx+\omega t)-2\sin(kx-\omega t)+0.5\cos\left(kx-\omega t+\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=[0.54cos^2(kx)+7.13sin^2(kx)-1.41\sin(kx)\cos(kx)]^{1/2}\ cos[F(x)-\omega t]$$

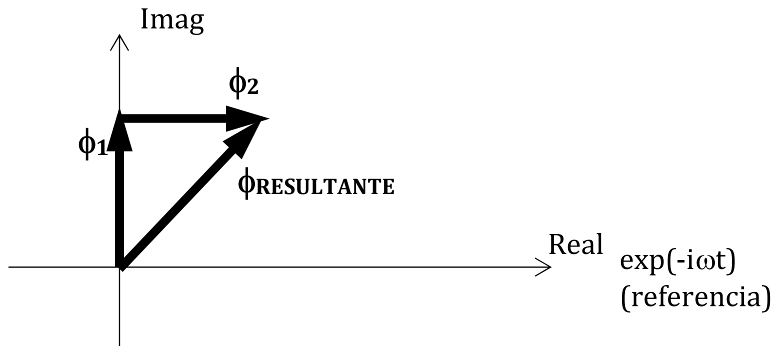
Donde:

$$F(x)=arctan\left[\frac{0.35\cos(kx)-2.65\sin(kx)}{-0.65\cos(kx)-0.35\sin(kx)}\right]$$

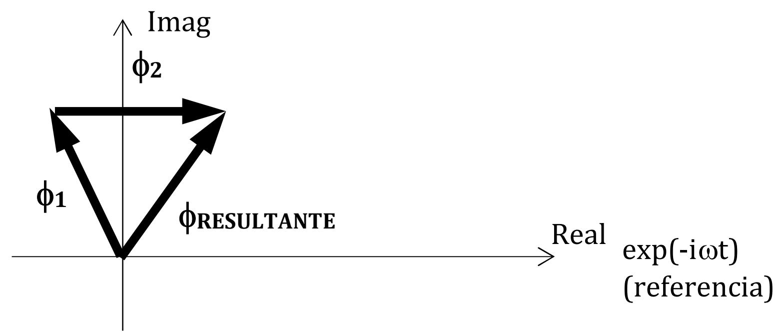
4. Hacer las mismas sumas de fasores que en el ejercicio 3, pero ahora en forma gráfica. Comparar los resultados obtenidos.

Una vez que tenemos expresados los fasores exponenciales a sumar, y luego de sacado el factor común exp(-iωt) o bien exp[i(kx-ωt)], nos quedan como sumandos números complejos expresados en formato exponencial. Estos deben sumarse en el plano complejo usando el método del polígono vectorial.

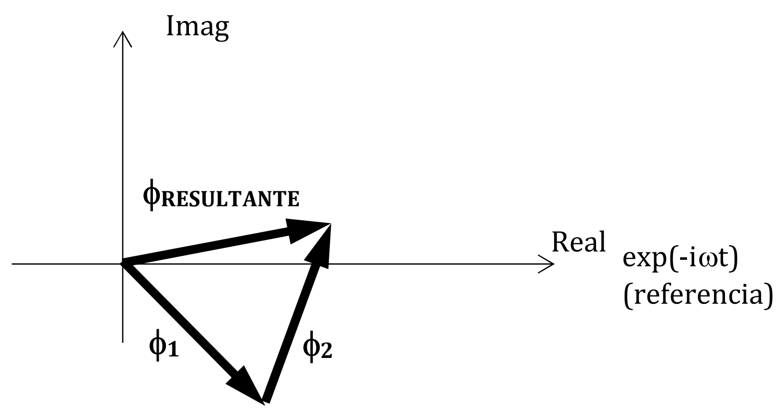
(5)



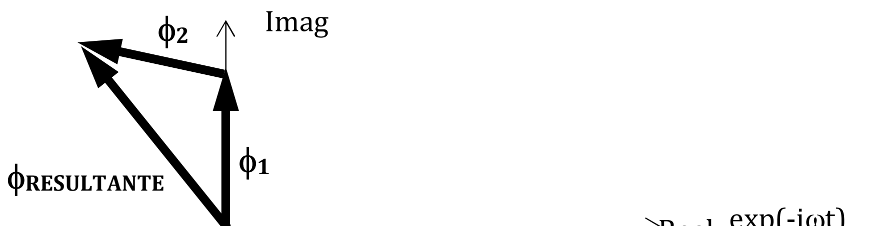
(6)


Imag
ϕ2
ϕ1
ϕRESULTANTE
Real
exp(-iωt)
(referencia)

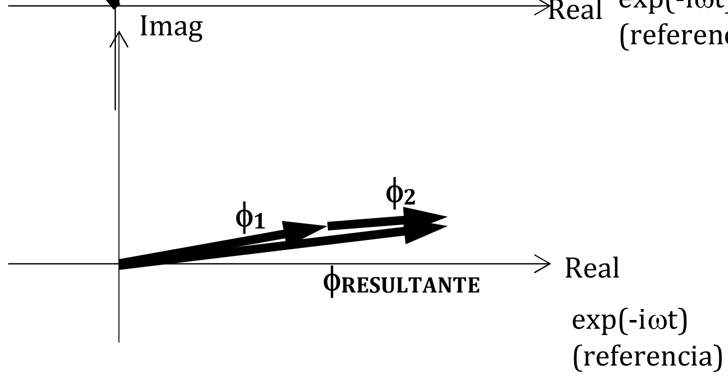
(7)


Imag
ϕRESULTANTE
Real
exp(-iωt)
(referencia)
ϕ1
ϕ2

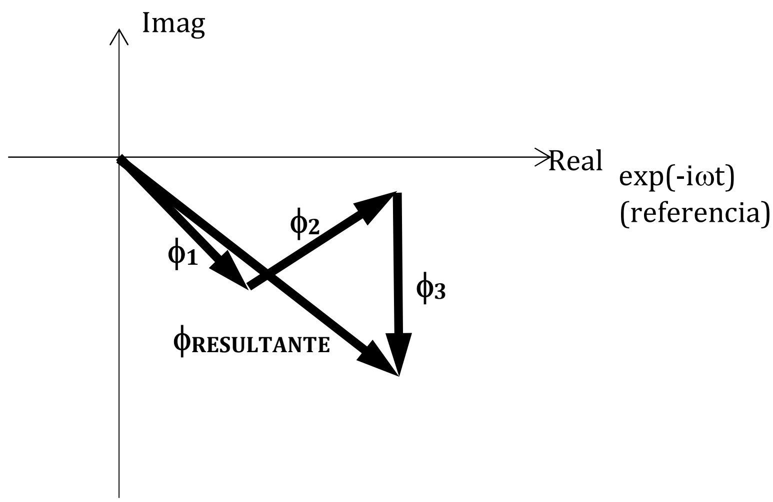
(8)


ϕ2
Imag
ϕ1
ϕRESULTANTE
Real
exp(-iωt)
(referencia)

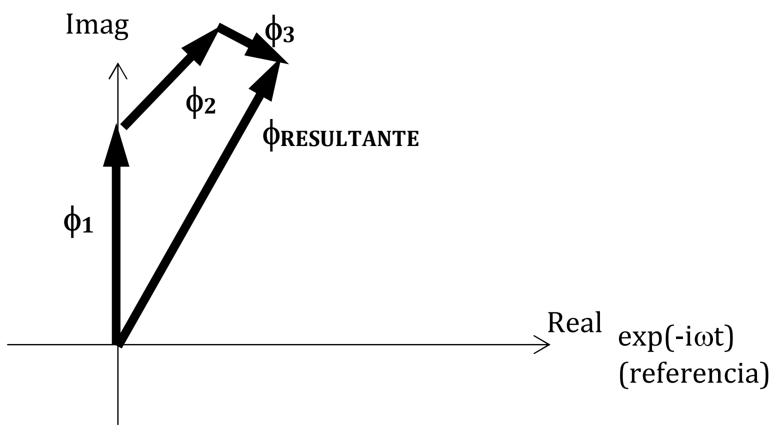
(9)


Imag
ϕ2
ϕ1
Real
ϕRESULTANTE
exp(-iωt)
(referencia)

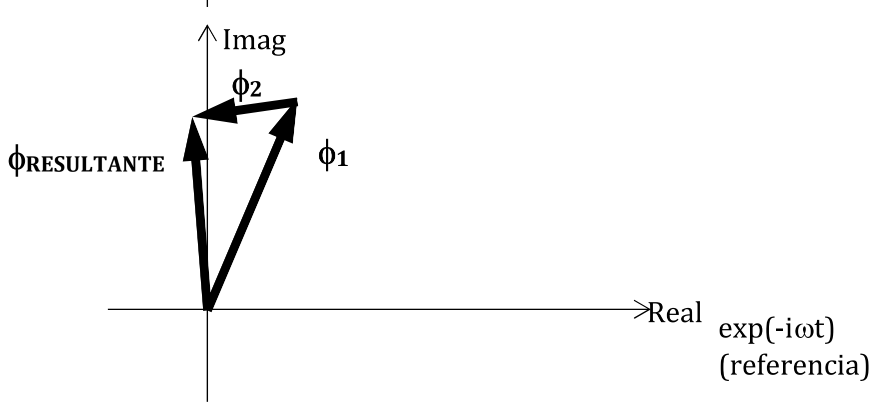
(10)


Imag
Real
exp(-iωt)
(referencia)
ϕ1
ϕ2
ϕ3
ϕRESULTANTE

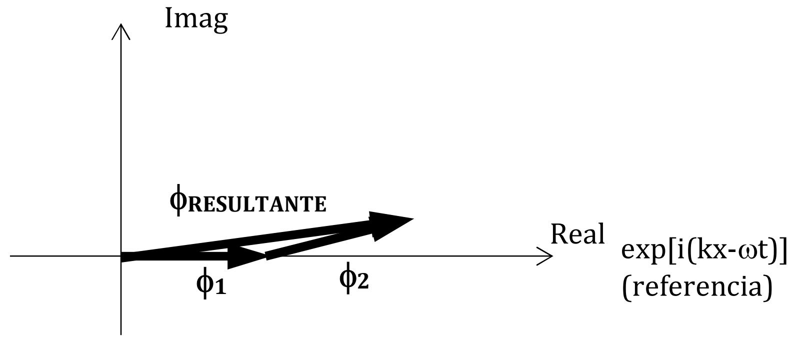
(11)


Imag
ϕ3
ϕ2
ϕRESULTANTE
ϕ1
Real
exp(-iωt)
(referencia)

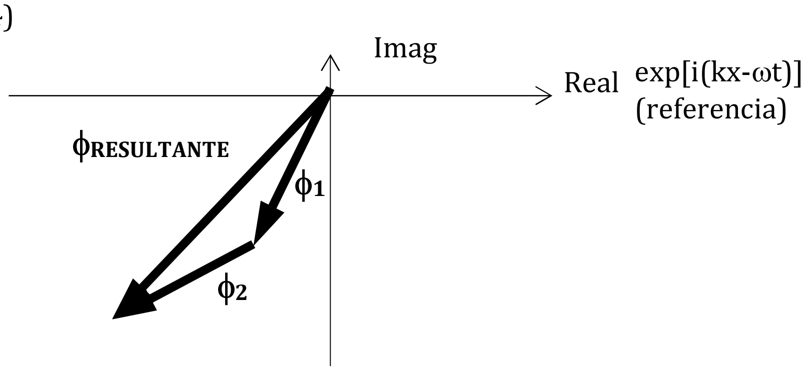
(12)


Imag
ϕ2
ϕRESULTANTE
ϕ1
Real
exp(-iωt)
(referencia)

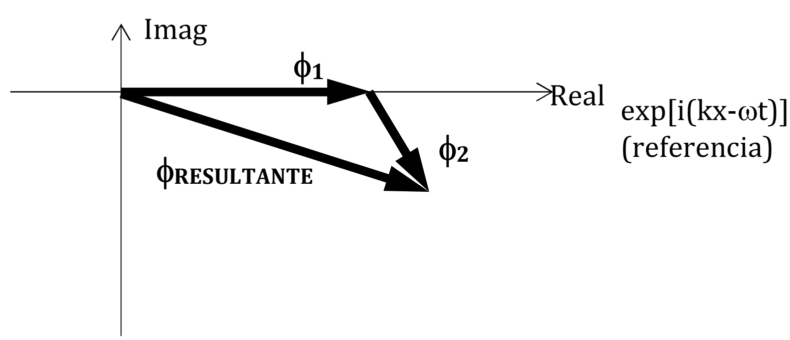
(13)


Imag
ϕRESULTANTE
Real
exp[i(kx-ωt)]
(referencia)
ϕ1
ϕ2

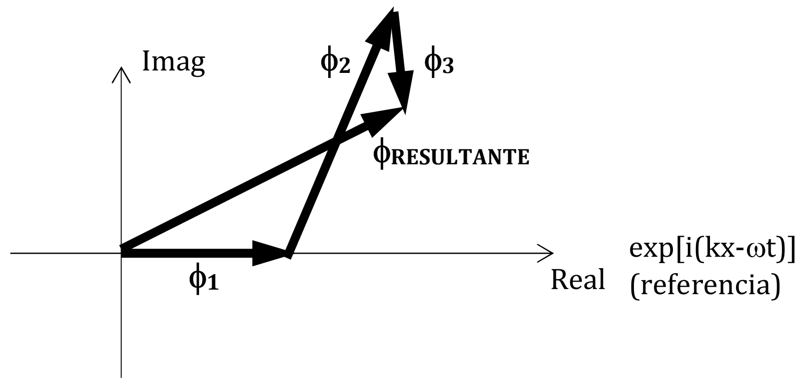
(14)


Imag
Real
exp[i(kx-ωt)]
(referencia)
ϕRESULTANTE
ϕ1
ϕ2

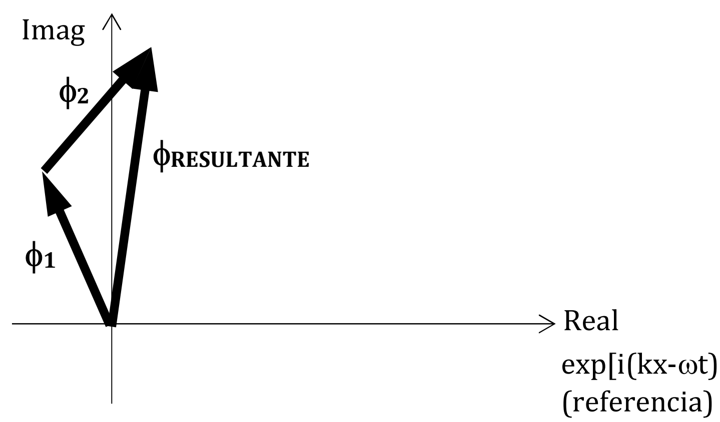
(15)


Imag
ϕ1
Real
exp[i(kx-ωt)]
(referencia)
ϕ2
ϕRESULTANTE

(16)



(17)



Interferencia de fuentes coherentes

5. Dos fuentes sonoras oscilan armónicamente con una frecuencia de $100Hz$. En un punto situado a $5m$ de una de ellas y a $5{,}85m$ de la otra la amplitud de la onda sonora procedente de cada fuente separadamente es A.

   a) ¿Cuál es la diferencia de fase de la onda sonora procedente de ambas fuentes en dicho punto?

   b) ¿Y la amplitud de la onda resultante en dicho punto? Depende o no de la geometría del problema? Tome $c = 340m/s$.

   La diferencia de fase vine dada por el desfasaje inicial entre fuentes (que en este caso es nulo) y por la diferencia de camino, en este caso $\Delta\varphi = \pi/2$.
   Las ondas sonoras son longitudinales, es decir que sus vectores desplazamiento (el sentido de la vibración) pueden ser paralelos, antiparalelos o tener algún ángulo entre sí dependiendo de la

geometría del problema. En el caso en que los vectores son paralelos, la amplitud resultante es 1.41A.

6. Dos antenas, colocadas sobre el eje y y separadas una distancia $D = \lambda/2$ emiten OEM. La antena (1) está adelantada en π con respecto a la antena (2), (ver Fig. 2). Ambas antenas emiten la misma intensidad I_0. Encuentre la distribución de intensidad en función del ángulo, para grandes distancias de la antena. Es decir encuentre la forma del así llamado *lóbulo de emisión*.

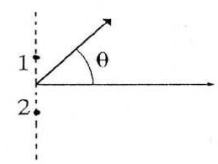


Figura 2.

Sean r_1 y r_2 las distancias del observador a las fuentes 1 y 2 respectivamente. Como se trata de un observador lejano, ambas distancias son paralelas y cumplen $r_2 = r_1 + e$, en donde $e = D\sin\theta = \frac{\lambda}{2}\sin\theta$. En la posición de este observador llegan las ondas:

$$E_1 = E_0\cos(kr_1 - \omega t - \pi)$$

$$E_2 = E_0\cos(kr_1 + ke - \omega t)$$

Sumando fasorialmente se llega a:

$$E_T = 2E_0\cos\left(\frac{ke}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(kr_1 - \omega t + \frac{ke}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$E_T = -2E_0\sin\left(\frac{ke}{2}\right)\cos\left(kr_1 - \omega t + \frac{ke}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$$

Y la intensidad es:

$$I_T = \frac{2E_0^2\sin^2\left(\frac{ke}{2}\right)}{\mu_0 c} = \frac{2E_0^2\sin^2\left(\frac{\pi\sin\theta}{2}\right)}{\mu_0 c}$$

7. a) Demostrar que las posiciones de los mínimos de interferencia en una pantalla a una distancia grande L de tres fuentes sincrónicas

i
gualmente separadas (con separación D, siendo $D \gg \lambda$) vienen dadas aproximadamente por:

$$y = n\frac{\lambda}{3}\frac{L}{D}$$

donde n es natural no múltiplo de 3.

b) Para L = $1m$, λ = 5 × $10^{-7}m$ y D = $0{,}1mm$, calcular la anchura de los máximos de interferencia principales (es decir la distancia entre mínimos sucesivos).

Si sumamos fasores para las tres fuentes sale:

$$E_T = E_0 \frac{\sin\left(\frac{3\pi D \sin\theta}{\lambda}\right)}{\sin\left(\frac{\pi D \sin\theta}{\lambda}\right)} \cos(kl - \omega t)$$

Los mínimos de esta función están en los ángulos en donde se anula el numerador pero no el denominador de las amplitudes, esto es:

$$\frac{3\pi D \sin\theta}{\lambda} = n\pi$$

$$\frac{\pi D \sin\theta}{\lambda} \neq m\pi$$

Esto es cuando $\sin\theta = \frac{n\lambda}{3D}$ con $n \in \mathbb{N} \neq \{3m\}$ con $m \in \mathbb{N}$.

Para ángulos pequeños $\sin\theta \approx \tan\theta = \frac{y}{L}$, de donde se demuestran los valores de "y" para los mínimos.

b) Ancho=3.33mm

8. Sea un sistema de N fuentes alineadas que emiten ondas sincrónicamente en todas direcciones, con igual amplitud, pero esa amplitud A es función del ángulo (es decir A = $f(\theta)$). Deduzca, usando notación fasorial, una expresión para el diagrama de interferencia a distancias muy grandes del sistema de las N fuentes. ¿Cómo se compara la amplitud de la onda en un máximo de interferencia, con la amplitud de la onda que emite cada fuente?

   La ecuación de la armónica para la j-ésima fuente en un observador lejano queda:

$$\phi_j = f(\theta)\cos\{k[r + (j-1)d] - \omega t\}$$

   En donde d es la diferencia de camino, respecto del observador, de dos fuentes consecutivas del arreglo: d=Dsinθ.

   La suma de las N fuentes del arreglo (ϕ total) queda:

$$\phi_T = f(\theta)e^{i(kr-\omega t)}\sum_{j=1}^{N} e^{ik(j-1)d} = f(\theta)e^{i(kr-\omega t)}\sum_{j=0}^{N-1} e^{ikjd}$$

Sabiendo que

$$\sum_{j=0}^{N-1} q^j = \frac{q^N - 1}{q - 1}$$

Y operando algebraicamente, llegamos a:

$$\phi_T = f(\theta)\frac{\sin\left[\left(\frac{NkD}{2}\right)\sin\theta\right]}{\sin\left[\left(\frac{kD}{2}\right)\sin\theta\right]}\cos\left[kr - \omega t + \frac{(N-1)kD}{2}\sin\theta\right]$$

Si ponemos al observador en una dirección en la que se anulan numerador y denominador simultáneamente (es decir $\left(\frac{kD}{2}\right)\sin\theta = n\lambda$), resulta $\phi_{TMAX} = N\, f(\theta)$, y estamos en presencia de un máximo absoluto de interferencia, pero podría no ser un máximo en general, ya que eso depende de cuánto valga f(θ).

9. En el diagrama de interferencia de luz proveniente de dos rendijas se introduce en el camino de uno de los haces una lámina transparente de vidrio, de índice de refracción *n* = 1,5 y espesor '*e*'. Si el diagrama de interferencia se observa en una pantalla situada a la distancia *D* del plano que contiene las rendijas, halle cómo depende la posición del máximo central de interferencia, del espesor de la lámina de vidrio.

En este caso el defasaje por diferencia de camino se produce por diferencia en las distancias al observador y por diferencia en el medio por el cual se propagan ambos rayos.

En el observador tenemos:

$$E_1 = E_0\cos(kr - \omega t)$$

$$E_2 = E_0\cos[k(r + d - e) + k_v e - \omega t]$$

Los máximos se producen para valores de ángulos tales que la diferencia de fase entre las ondas dé múltiplo de (2π):

$$[k(r + d - e) + k_v e - \omega t] - (kr - \omega t) = 2\pi M$$

Con M entero. Pero el máximo <u>central</u> se produce cuando la diferencia de fase es cero: M=0.

$$kd - ke + k_v e = 0$$

Como $d = a\sin\theta$ siendo a la separación entre rendijas y aproximando para ángulos pequeños queda:

$$y \approx \frac{-(n_v - 1)eD}{a}$$

Donde D es la distancia entre las rendijas y la pantalla.