RESPUESTAS DE LA GUIA #3 AÑO 2021

RESPUESTAS:

1) $E_{CIN} = (3/2)\ k\ T\ N_A = 3740$ J

2) a) $\Delta T = 2.5$ °C/cm · 100cm = 250 °C

b) $J_Q \equiv S_Q = K_{cu}\ \Delta T / L = 96000\ Wm^{-2}$

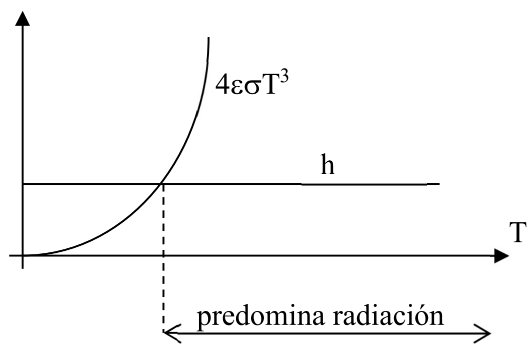
3) a)

$$J_Q = h(T-\theta) + \varepsilon\sigma\left(T^4 - \theta^4\right)$$

Dividiendo polinomios, se tiene:

$$\begin{aligned} J_Q &= h(T-\theta) + \varepsilon\sigma\left(T^3 + \theta T^2 + \theta^2 T + \theta^3\right)(T-\theta) \cong \\ &\cong h(T-\theta) + \varepsilon\sigma 4T^3(T-\theta) = \left(h + 4\varepsilon\sigma T^3\right)(T-\theta) = \\ &= h_{ap}(T-\theta) \end{aligned}$$

b)




Condición de predominio de radiación: $4\varepsilon\sigma T^3 >> h \Rightarrow T >> [h/(4\varepsilon\sigma)]^{1/3}$
En este caso, T >> 353K

4) El cuerpo no está en equilibrio térmico en este caso:

$$P_{em} = h_{ap}(T-\theta)S = -cG\frac{dT}{dt}$$

donde c es la capacidad calorífica del material. Para llegar al resultado, se debe resolver la ecuación diferencial:

$$-\int_0^t \frac{h_{ap}S}{cG}dt = \int_{To}^{T(t)} \frac{dT}{(T-\theta)}$$

$$\Rightarrow\ -\frac{h_{ap}\ S\ t}{c\ G} = ln\left[\frac{T(t)-\theta}{T_0-\theta}\right]$$

5) En este ejercicio se usa otra nomenclatura: se llama $\lambda$ a la conductividad que normalmente llamamos K. En cambio, K es en este caso una constante a determinar. Y $\theta$, que normalmente usamos como “resistencia térmica absoluta”, se está usando para designar temperaturas.

Suponiendo que la temperatura ambiente exterior $\theta_1$ es mayor que la interior $\theta_2$, los flujos de calor que se producen son:

$$J_Q A = h_{ap}\left(\theta_1 - T_{pared\_ext}\right)A$$
$$J_Q A = \frac{\lambda}{d}\left(\theta_{pared\_ext} - T_{pared\_\mathrm{int}}\right)A$$
$$J_Q A = h_{ap}\left(T_{pared\_\mathrm{int}} - \theta_2\right)A$$

De donde:

$$J_Q\left[\frac{1}{h_{ap}} + \frac{d}{\lambda} + \frac{1}{h_{ap}}\right] = \theta_1 - \theta_2$$

$$\Rightarrow K = \left[\frac{2}{h_{ap}} + \frac{d}{\lambda}\right]^{-1}$$

6) De acuerdo a los resultados del ejercicio 5, las potencias que atraviesan las paredes de aluminio y vidrio, respectivamente, son:

$$P_{al} = \left(\frac{2}{h_{apAl}} + \frac{d_{Al}}{\lambda_{Al}}\right)^{-1}\left(T_{\mathrm{int}} - T_{ext}\right)Area_{Al} = 0.20015^{-1}\cdot 25\cdot 27 = 3372W$$

$$P_{Vid} = \left(\frac{2}{h_{apVid}} + \frac{d_{Vid}}{\lambda_{Vid}}\right)^{-1}\left(T_{\mathrm{int}} - T_{ext}\right)Area_{Vid} = 0.28571^{-1}\cdot 25\cdot 9 = 788W$$

Entonces: $P_{estufa}$ = (3372+788) / 0.9 = 4622W.

En unidades de Kcal/h (más usadas para estufas): 4622 (3600/4180)Kcal/h = 3980Kcal/h

7) El espesor del vidrio de los balones es despreciable. Entonces, no tenemos en cuenta la conducción, es decir la temperatura de la pared interna del vidrio es la misma que la externa del mismo. Y al ser $h_{ap}$ tendiente a infinito, la temperatura de la pared interna del vidrio es la misma que la temperatura del agua. De las dos afirmaciones anteriores, se deduce que la temperatura externa del vidrio es la temperatura del agua.

Para hallar el $h_{ap}$, usaremos $h+4\varepsilon\sigma T_{amb}^3$. Se usa $T_{amb}$ en lugar de $T_{vidrio}$ porque $T_{vidrio}$ varía con el tiempo, y $h_{ap}$ no debe depender del tiempo para que podamos resolver la ecuación diferencial más fácilmente.

Para el que está pintado de plateado: $hap=h+4\varepsilon\sigma T_{amb}^3=11+0.57=11.57 Wm^{-2}K^{-1}$

Para el que está pintado de negro: $hap=h+4\varepsilon\sigma T_{vidrio}^3=11+5.70=16.70 Wm^{-2}K^{-1}$

Se pudo haber usado otro criterio conducente a una mejor aproximación: en t=0, la temperatura promedio entre vidrio y aire es de 60°C, mientras que para $t\rightarrow\propto$ la temperatura

promedio entre vidrio y aire es de 20°C. Por lo tanto se podría haber calculado hap usando una T constante de (60+20)/2=40°C. Esto habría resultado en:
Para el que está pintado de plateado: hap=h+4εσ $313^3$=11+0.70=11.70$Wm^{-2}K^{-1}$
Para el que está pintado de negro: hap=h+4εσ $313^3$=11+6.95=17.95$Wm^{-2}K^{-1}$
Una vez determinado hap, se procede de manera similar al ejercicio 4, quedando:

$$T_{agua}(t) = T_{amb} + \left(373 - T_{amb}\right) \cdot e^{-t/\tau}$$

$$donde \quad \tau = \frac{c_{H20} \cdot m}{h_{ap} S} = \frac{c_{H20} \cdot \delta \cdot R}{3h_{ap}}$$

Donde δ=1000$Kg/m^3$, $c_{H2O}$=4180J/(Kg K). Es decir, τ=6021s (balón plateado), y τ=4171s (balón negro)

8) a) Comenzamos planteando:

$$h_{ap}(T_1 - T_2)4\pi R^2 = -m_1 c_1 \frac{dT_1}{dt}$$

$$h_{ap}(T_1 - T_2)4\pi R^2 = +m_2 c_2 \frac{dT_2}{dt}$$

Ahora multiplicamos ambos miembros de la ecuación de arriba por $m_2 c_2$, y los de la ecuación de abajo por $m_1 c_1$. Luego sumamos, quedando:

$$(m_1 c_1 + m_2 c_2) h_{ap}(T_1 - T_2)4\pi R^2 = -m_1 c_1 m_2 c_2 \frac{d(T_1 - T_2)}{dt}$$

$$-\int_0^t \frac{(m_1 c_1 + m_2 c_2)}{m_1 c_1 m_2 c_2} h_{ap} 4\pi R^2 dt = \int_{T_{10}-T_{20}}^{T_1-T_2} \frac{d(T_1 - T_2)}{(T_1 - T_2)}$$

Luego de integrar y operar algebraicamente, se llega al resultado final.

b) El intercambio de calor finaliza cuando la esfera y el líquido alcanzan la misma temperatura. Entonces $T_{1f} = T_{2f}$. Por otro lado, la energía que pierde la esfera es adquirida por el líquido. Entonces:

$$\Delta Q = -m_1 c_1 \left(T_{1f} - T_{10}\right) = m_2 c_2 \left(T_{2f} - T_{20}\right)$$

$$-m_1 c_1 \left(T_f - T_{10}\right) = m_2 c_2 \left(T_f - T_{20}\right)$$

$$T_{1f} = T_{2f} = T_f = \frac{m_1 c_1 T_{10} + m_2 c_2 T_{20}}{m_1 c_1 + m_2 c_2}$$

9)

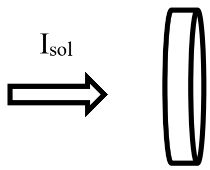
a) $I_{laser}$= $P_{laser}$ / ($\Omega r^2$) =10$Wm^{-2}$
$I_{lamp}$= $P_{lamp}$ / ($4\pi r^2$)=7.96$Wm^{-2}$
⇒ $Pabs_{laser}$ = e $I_{laser}$ π $r_{esf}^2$=0.5mW

$\Rightarrow Pabs_{lamp} = e\, I_{lamp}\, \pi\, r_{esf}^2 = 0.4 mW$

b) $0.9 mW = e\, \sigma\, T^4\, (4\pi\, r_{esf}^2)$

$\Rightarrow T = 94$ K (Es muy frío, porque no hay un entorno a temperatura ambiente. Es como un objeto en el espacio exterior, sin que le lleguen rayos del sol)

10)




$$P_{abs} - P_{em} = m\,c\,\frac{dT}{dt}$$

$$P_{abs}^{sol} + P_{abs}^{amb} - P_{em}^{amb} = m\,c\,\frac{dT}{dt}$$

$$P_{abs}^{sol} - \left(P_{em}^{amb} - P_{abs}^{amb}\right) = m\,c\,\frac{dT}{dt}$$

$$e\, I_{sol}\, A - h_{ap}\,(T - T_{amb})\,2A = m\,c\,\frac{dT}{dt} \qquad (1)$$

$$\frac{dT}{dt} + \frac{h_{ap}\,2A}{m\,c}\,T = \frac{h_{ap}\,2A}{m\,c}\,T_{amb} + \frac{e\,I_{sol}\,A}{m\,c} \qquad (2)$$

La última es una ecuación diferencial, cuya solución es de la forma:

$$T = P + Q\,e^{-\frac{h_{ap}\,2A\,t}{m\,c}} \qquad (3)$$

Para hallar $P$ y $Q$ hay dos métodos, uno más analítico y uno más directo.

Método #1:

Se reemplazan las condiciones de $t = 0$ y de $t \to \infty$.

En $t = 0$, $T = T_{amb}$:

$$\Rightarrow P + Q = T_{amb}$$

En $t \to \infty$, vuelve a estar en estado estacionario, pero a una temperatura más alta que $T_{amb}$, ya que la placa está iluminada.

$$\Rightarrow \frac{dT}{dt} = 0$$

Reemplazando en la ecuación diferencial (2):

$$T = T_{amb} + \frac{e\,I_{sol}}{2\,h_{ap}}$$

Comparando con la solución (3):

$$P = T_{amb} + \frac{e\ I_{sol}}{2\ h_{ap}}$$

De donde:

$$Q = -\frac{e\ I_{sol}}{2\ h_{ap}}$$

Se llega entonces a:

$$T = T_{amb} + \frac{e\ I_{sol}}{2\ h_{ap}} - \frac{e\ I_{sol}}{2\ h_{ap}}\ e^{-\frac{h_{ap}\ 2A\ t}{m\ c}}$$

Método #2:

Consiste en conocer la temperatura inicial y la temperatura final.
La inicial, no hace falta calcularla, es $T_{amb}$.
Es fácil calcular la temperatura final: reemplazando $\frac{dT}{dt} = 0$ (estado estacionario) en (1):

$$e\ I_{sol}\ A = h_{ap}\ (T - T_{amb})\ 2A$$

$$\Rightarrow\ T = T_{amb} + \frac{e\ I_{sol}}{2\ h_{ap}}$$

Y ahora se reemplazan ambas temperaturas en la fórmula general:

$$T = T_{final} + \left(T_{inicial} - T_{final}\right) e^{-\alpha t} \qquad (4)$$

Siendo $\alpha$ el término que multiplica a $T$ en la ecuación diferencial (2).
Queda entonces, al reemplazar en la (4):

$$T = T_{amb} + \frac{e\ I_{sol}}{2\ h_{ap}} + \left[T_{amb} - \left(T_{amb} + \frac{e\ I_{sol}}{2\ h_{ap}}\right)\right] e^{-\frac{h_{ap}\ 2A\ t}{m\ c}}$$

De donde:

$$T = T_{amb} + \frac{e\ I_{sol}}{2\ h_{ap}} - \frac{e\ I_{sol}}{2\ h_{ap}}\ e^{-\frac{h_{ap}\ 2A\ t}{m\ c}}$$

11)

$$P_{sol} = 1400\ \ 4\,\pi\ \ (149\ \ \ 10^{9})^2 = 3.9\ \ 10^{26}\ W$$

$$S_{Q_{sol}} = \frac{P_{sol}}{4\,\pi\ (6.96\ \ \ 10^{8})^2} = 6.4\ \ 10^{7}\ W\ m^{-2}$$

$$S_{Q_{sol}} = e\,\sigma\,T^4 \quad \Rightarrow \quad T = 5800\ K$$

12)

a)

$$P_{abs}^{sol} = \left(P_{em}^{aire} - P_{abs}^{aire}\right)$$

$$e_b I\left(\pi \cdot r_b^2\right) = \left[e_b \sigma\left(T_b^4 - T_{aire}^4\right)\right]\left(4\pi \cdot r_b^2\right)$$

$\Rightarrow$ $T_{bulbo}$=31°C

b)

$$P_{abs}^{sol} = \left(P_{em}^{aire} - P_{abs}^{aire}\right)$$

$$e_b I\left(\pi \cdot r_b^2\right) = e_b \sigma\left(T_b^4 - T_{aire}^4\right)\left(4\pi \cdot r_b^2\right) + h \cdot \left(T_b - T_{aire}\right)\left(4\pi \cdot r_b^2\right) = h_{ap} \cdot \left(T_b - T_{aire}\right)\left(4\pi \cdot r_b^2\right)$$

$\Rightarrow$ $T_{bulbo}$=28.5°C

13) Ver apunte de teoría

14)

a) Yendo desde el exterior de la casa al interior de la misma, existen las siguientes resistencias térmicas:

| Resistencia térmica | Interpretación | Fórmula y valor [K m$^2$ / W] |
|---|---|---|
| $R_{se}$ | R de la superficie exterior | $R_{se} = \frac{1}{h_{apext}} = 0.04$ |
| $R_{rev1}$ | R del revoque exterior del ladrillo exterior | $R_{rev1} = \frac{e}{\lambda} = \frac{0.015}{1} = 0.015$ |
| $R_{L1}$ | R del ladrillo exterior | $R_{L1} = \frac{e}{\lambda} = \frac{0.12}{0.7} = 0.171$ |
| $R_{rev2}$ | R del revoque interior del ladrillo exterior | $R_{rev2} = \frac{e}{\lambda} = \frac{0.015}{1} = 0.015$ |
| $R_{pol}$ | R de la capa de poliuretano | $R_{pol} = \frac{e}{\lambda} = \frac{0.03}{0.03} = 1$ |
| $R_{cam}$ | R de la cámara de aire sin ventilar | $R_{cam} = 0.165$ , según tabla de la norma NCh853 |
| $R_{L2}$ | R del ladrillo interior | $R_{L2} = \frac{e}{\lambda} = \frac{0.12}{0.7} = 0.171$ |
| $R_{rev3}$ | R del revoque interior del ladrillo interior | $R_{rev3} = \frac{e}{\lambda} = \frac{0.015}{1} = 0.015$ |
| $R_{si}$ | R de la superficie interior | $R_{si} = \frac{1}{h_{apint}} = 0.13$ |

Entonces, la resistencia térmica resultante es la suma de las anteriores, es decir:

$$R = 1.722\ \frac{\mathrm{K\,m^2}}{\mathrm{W}}$$

Y la transmitancia es:

$$U = \frac{1}{R} = \frac{1}{1.722} = 0.581\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2\,K}}$$

b)

$$S_Q = U\,\Delta T = 0.581\,(293 - 263) = 17.43\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2}}$$

$$P = I_Q = S_Q\,A = 17.43\ 20 = 348.6\ \mathrm{W} = 300.2\,\frac{\mathrm{Kcal}}{\mathrm{h}}$$

c) Con el valor de $S_Q$ calculado en el inciso (b), se pueden calcular las temperaturas de las superficies izquierda y derecha de la cámara:

$$T_{camder} = 293 - (R_{si} + R_{re} \quad + R_{L2})\,S_Q = 293 - 0.316\ \ 17.43\ = 287.50\ \mathrm{K}$$

$$T_{camizq} = 293 - (R_{si} + R_{rev}\ \ + R_{L2} + R_{cam})\,S_Q = 293 - 0.481\ \ 17.43\ = 284.62\ \mathrm{K}$$

La temperatura promedio de la cámara es: $T_{cam} = 0.5\,(287.50 + 284.62) = 286.06$ K. La diferencia de temperaturas entre ambos lados de la cámara es $\Delta T_{cam} = 2.88$ K, con lo que el factor $f$ en la fórmula de la norma 6946:2017 es 1.25. Con esa fórmula, calculamos:

$$R_{cam} = \frac{1}{\dfrac{4\,\sigma\,T_{cam}^3}{\dfrac{1}{e_1} + \dfrac{1}{e_2} - 1} + \max\left(\dfrac{\lambda}{a}\,, f\right)} = \frac{1}{\dfrac{4\ 5.67\ 10^{-8}\ 286.06^3}{\dfrac{1}{0.82} + \dfrac{1}{0.82} - 1} + \max\left(\dfrac{0.026}{0.05}\,, 1.25\right)}$$

$$R_{cam} = \frac{1}{\dfrac{4\ 5.67\ 10^{-8}\ 286.06^3}{\dfrac{1}{0.82} + \dfrac{1}{0.82} - 1} + 1.25} = 0.202\ \frac{\mathrm{K\,m^2}}{\mathrm{W}}$$

Con esta $R_{cam}$ , la nueva resistencia térmica resultante es:

$$R = 1.759\ \frac{\mathrm{K\,m^2}}{\mathrm{W}}$$

De donde:

$$S_Q = \frac{\Delta T}{R} = \frac{30}{1.759} = 17.06\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2}}$$

$$P = I_Q = S_Q\,A = 17.06\ 20 = 341.1\ \mathrm{W} = 293.8\,\frac{\mathrm{Kcal}}{\mathrm{h}}$$

Prácticamente no hubo variación respecto al resultado del inciso (b). Por dos razones: porque la fórmula de la norma ISO 6946:2017 no difiere demasiado de la tabla de la NCh853, y además porque en este caso la incidencia de la cámara en la resistencia térmica total no es muy alta.

15) El vidrio simple de 4mm posee una típica transmitancia $U_{g1} = 5.7\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2K}}$. El triple vidrio, yendo a la tabla, tiene una transmitancia $U_{g2} = 1.9\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2K}}$. Ambos valores ya tienen en cuenta $R_{si}$ y $R_{se}$ (ver ejercicio anterior). Por lo tanto, con el vidrio común:

$$S_{Q1} = U_{g1}\,\Delta T = 5.7\ \ 30 = 171\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2}}$$

$$I_{Q1} = S_{Q1}\,A = 171\ \ 10 = 1710\ \mathrm{W}$$

Y con el vidrio triple:

$$S_{Q2} = U_{g2}\,\Delta T = 1.9\ \ 30 = 57\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2}}$$

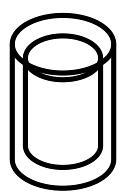
$$I_{Q2} = S_{Q2}\,A = 57\ \ 10 = 570\ \mathrm{W}$$

El ahorro es la diferencia entre $I_{Q1}$ e $I_{Q2}$

$$P = I_{Q1} - I_{Q2} = 1710 - 570 = 1140\ \mathrm{W} = 982\,\frac{\mathrm{Kcal}}{\mathrm{h}}$$

No se tuvo en cuenta la incidencia del cambio del marco.

16) Los termos de vidrio están hechos de dos envases de vidrio separados por vacío. Entre ellos sólo puede haber radiación:



Despreciando la superficie del tapón y la pérdida de calor por el mismo, la superficie para la cual el vaso interno y el externo se enfrentan es:

$$Area = 2\ \ (\pi\ 0.03^2) + 2\,\pi\ 0.03\ 0.36 = 0.0735\ m^2$$

Como entre los vasos hay vacío, usaremos el $S_{Qneto}$ que resultó del ejercicio 11. Dado que ambos vasos son del mismo material, entonces $e_1$=$e_2$=e. Suponemos que la cara interna del vaso de afuera está a temperatura ambiente y que la cara externa del vaso de adentro está a la temperatura del agua, lo cual es una aproximación:

$$S_{Q_{neto}} = \frac{\sigma\,(T_{AGUA}^4 - 293^4)}{\frac{2}{e} - 1}$$

$$S_{Q_{neto}}\,Area = -m\,c_{H2O}\,\frac{dT_{AGUA}}{dt}$$

$$-\int_0^{8100} \frac{\sigma\ \ Area}{\left(\frac{2}{e}-1\right)\,m\,c_{H2O}}\,dt = \int_{371}^{363} \frac{dT_{AGUA}}{T_{AGUA}^4 - 293^4}$$

$$-\frac{5.67\ \ 10^{-8}\ \ 0.0735\ \ \ 8100}{\left(\frac{2}{e}-1\right)\ 1\ \ \ 4180} = -7.4378\ \ 10^{-1}$$

$$\Longrightarrow \quad e = 0.169$$

17)

$$Area = 2\,\pi\,0.0002\ 0.3 = \ 3.77\ \ 10^{-4}\ m^2$$

$$S_Q = \frac{Potencia\ irradiada}{Area} = \frac{100}{3.77\ \ 10^{-4}} = 265000\ W\ m^{-2}$$

$$S_Q = e\,\sigma\,(T^4 - 293^4)$$

$$\Longrightarrow T = 2060\ K = 1787\ °C$$

18)

a)

$$S(x)\pi R^2 - S(x+dx)\pi R^2 = [h(T - T_{AMB}) + \varepsilon\sigma(T^4 - T_{AMB}^4)](2\pi R dx)$$

$$\Rightarrow \frac{dS}{dx} = -\frac{2}{R}\,[h(T - T_{AMB}) + \varepsilon\sigma(T^4 - T_{AMB}^4)]$$

b)

$$\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{2}{\lambda R}\,[h(T - T_{AMB}) + \varepsilon\sigma(T^4 - T_{AMB}^4)]$$

c)

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{2h_{AP}}{\lambda R} T = -\frac{2h_{AP}}{\lambda R} T_{AMB}$$

d) Repetición de (a)

$$S(x)\pi R^2 - S(x+dx)\pi R^2 = [h(T - T_{AMB}) + \varepsilon\sigma(T^4 - T_{AMB}^4)](2\pi R dx) + \delta\pi R^2 dx c_e \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial S}{\partial x} = -\frac{2}{R}[h(T - T_{AMB}) + \varepsilon\sigma(T^4 - T_{AMB}^4)] - \delta c_e \frac{\partial T}{\partial t}$$

Repetición de b)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{2}{\lambda R}[h(T - T_{AMB}) + \varepsilon\sigma(T^4 - T_{AMB}^4)] + \frac{\delta c_e}{\lambda}\frac{\partial T}{\partial t}$$