RESPUESTAS GUÍA Nº2 - AÑO 2018

1) Las expresiones de los campos E y B armónicos son

$$E(x,t) = E_0 \ \sin(kx - \omega t)$$
$$B(x,t) = B_0 \ \sin(kx - \omega t)$$

O se podrían haber escrito ambos como cosenos.

a) $\overline{E}(x,t) = E_0 \ \sin(kx - \omega t) \ \overline{i} = E_x.\overline{i} + 0.\overline{j} + 0.\overline{k}$

$\overline{B}(x,t) = B_0 \ \sin(kx - \omega t) \ \overline{k} = 0.\overline{i} + 0.\overline{j} + B_z.\overline{k}$

La ecuación de onda 3D es

$$\nabla^2\overline{E} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\overline{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad (1)$$

$$\nabla^2\overline{E} = \frac{\partial^2\overline{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\overline{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\overline{E}}{\partial z^2}$$

Como $\overline{E}(x,t)$ no es función de y ni de z, entonces

$$\nabla^2\overline{E} = \frac{\partial^2\overline{E}}{\partial x^2} = -k^2E_0\sin(kx - \omega t)\,\overline{i} \qquad (2)$$
$$\frac{\partial^2\overline{E}}{\partial t^2} = -\omega^2E_0\sin(kx - \omega t)\,\overline{i} \qquad (3)$$

Reemplazando (2) y (3) en (1), obtenemos:

$$\nabla^2\overline{E} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\overline{E}}{\partial t^2} = -k^2E_0\sin(kx - \omega t)\,\overline{i} - \varepsilon\mu\big(-\omega^2E_0\sin(kx - \omega t)\,\overline{i}\big) =$$
$$= -k^2E_0\sin(kx - \omega t)\,\overline{i} + \varepsilon\mu\omega^2E_0\sin(kx - \omega t)\,\overline{i} =$$
$$(-k^2 + \varepsilon\mu\omega^2)E_0\sin(kx - \omega t)\,\overline{i} = \left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)E_0\sin(kx - \omega t)\,\overline{i}$$

Si reemplazamos $c = \lambda.f = {}^{\omega}/_{k}$, entonces nos queda:

$$-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = -k^2 + k^2 = 0$$

Por lo tanto, se satisface la ecuación de onda para el campo $\overline{E}$

Si repetimos lo hecho para $\overline{E}$ con el campo $\overline{B}$, la ecuación de onda es

$$\nabla^2\overline{B} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\overline{B}}{\partial t^2} = 0 \qquad (4)$$

Si reemplazamos en (4) el valor del campo $\overline{B}$

$$\nabla^2\overline{B} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\overline{B}}{\partial t^2} = -k^2B_0\sin(kx - \omega t)\,\overline{k} - \varepsilon\mu\big(-\omega^2B_0\sin(kx - \omega t)\,\overline{k}\big) =$$
$$= -k^2B_0\sin(kx - \omega t)\,\overline{k} + \varepsilon\mu\omega^2B_0\sin(kx - \omega t)\,\overline{k} =$$
$$= \left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)B_0\sin(kx - \omega t)\,\overline{k} = 0$$

Entonces, se satisfacen las ecuaciones de onda. Pero eso no significa que necesariamente se cumplan las ecuaciones de Maxwell. Para verificar las ecuaciones de Maxwell, utilizaremos la Ley de Faraday en forma diferencial, esto es:

$$\nabla \times \overline{E} + \frac{\partial \overline{B}}{\partial t} = 0 \qquad (5)$$

$$\nabla \times \overline{E} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \left(0.\overline{i} + \frac{\partial E_x}{\partial z}.\overline{j} + 0.\overline{k}\right) - \left(0.\overline{i} + 0.\overline{j} + \frac{\partial E_x}{\partial y}.\overline{k}\right) = 0$$

$$\frac{\partial \overline{B}}{\partial t} = -\omega B_0 \cos(kx - \omega t)\,.\overline{k}$$

Si reemplazamos en (5), vemos que

$$\nabla \times \overline{E} + \frac{\partial \overline{B}}{\partial t} = 0 - \omega B_0 \cos(kx - \omega t)\,.\overline{k} \neq 0$$

Por lo tanto no se satisfacen las ecuaciones de Maxwell

b) $\overline{E}(x,t) = E_0\ \sin(kx - \omega t)\ \overline{j}$
$\overline{B}(x,t) = B_0\ \sin(kx - \omega t)\ \overline{j}$

Repetimos el análisis del inciso a), llegando a:

$$\nabla \times \overline{E} + \frac{\partial \overline{B}}{\partial t} = kE_0 \cos(kx - \omega t)\,.\overline{k} + (-\omega)B_0 \cos(kx - \omega t)\,.\overline{j} \neq 0$$

c) Ídem a a) y b) con
$\overline{E}(x,t) = E_0\ sin(kx - \omega t)\ \overline{j}$
$\overline{B}(x,t) = B_0\ \sin(kx - \omega t)\ \overline{k}$

$$\nabla \times \overline{E} + \frac{\partial \overline{B}}{\partial t} = kE_0 \cos(kx - \omega t)\,.\overline{k} + (-\omega)B_0 \cos(kx - \omega t)\,.\overline{k}$$

De aquí obtenemos que si $kE_0 - \omega B_0 = 0$ se satisface la Ley de Faraday. Si despejamos B_0:

$$B_0 = \frac{kE_0}{\omega} = \frac{E_0}{c}$$

Por lo tanto si $B_0 \neq {}^{E_0}\!/_{c}$ no se satisface la Ley de Faraday.

2) Discuta.

3) $u_{total} = u_{el} + u_{mag}$

La onda es plana progresiva, entonces: E=f(x-ct), o bien E=f(x+ct).
Si por ejemplo E=f(x-ct):

$$u_{el}(x,t) = \frac{1}{2}\varepsilon\, f^2(x - ct)$$

$$u_{mag}(x,t) = \frac{1}{2\mu}B^2 = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{E}{c}\right)^2 = \frac{1}{2\mu c^2}f^2(x-ct) = \frac{1}{2}\varepsilon\, f^2(x-ct) = u_{el}(x,t)$$

$$u_{total} = \varepsilon E^2 = \frac{B^2}{\mu}$$

4) $E_{máx} = 0.0346\ V/m$
$B_{máx} = 1.15 \times 10^{-10}\ T$

5) $P = 10\ W$

a) $E_{máx} = 6.446\ \times 10^{-8}\ V/m$
$\mathrm{E_{ef}} = 4.558 \times 10^{-8}\ \mathrm{V/m}$
$\mathrm{I_{OEM}} = 5.51 \times 10^{-1}\ \ \mathrm{W/m^2}$

b) $E_{máx} = 7.655\ \times 10^{-6}\ V/m$
$\mathrm{E_{ef}} = 5.413 \times 10^{-6}\ \mathrm{V/m}$
$\mathrm{I_{OEM}} = 7.77 \times 10^{-14}\ \mathrm{W/m^2}$

6) Como sabemos de Física I, cuando no actúan fuerzas externas se conserva el ímpetu total del sistema. Entonces, la fuerza impulsiva debido a la colisión se puede calcular como:

$$\overline{F}.\Delta t = \overline{\Delta P}$$

Donde $\overline{\Delta \mathrm{P}}$ es la variación del ímpetu lineal de la vela. Si calculamos $\overline{\Delta \mathrm{P}}$

$$\overline{\mathrm{P_{OEMi}}} + \overline{\mathrm{P_{velai}}} = \overline{\mathrm{P_{OEMf}}} + \overline{\mathrm{P_{velaf}}}$$

Donde los subíndices “i” y “f” significan inicial y final, respectivamente.
De aquí se desprende que:

$$\overline{\Delta \mathrm{P}} = \overline{\mathrm{P_{velaf}}} - \overline{\mathrm{P_{velai}}} = \overline{\mathrm{P_{OEMi}}} - \overline{\mathrm{P_{OEMf}}}$$

Como la reflexión es máxima,

$$\overline{\mathrm{P_{OEMi}}} - \overline{\mathrm{P_{OEMf}}} = \overline{\mathrm{P_{OEMi}}} - \left(-\overline{\mathrm{P_{OEMi}}}\right) = 2\overline{\mathrm{P_{OEMi}}}$$

Y tenemos como dato $\mathrm{I = p.c^2}$, entonces:

$$\langle|\overline{\mathrm{F}}|\rangle.\Delta \mathrm{t} = \langle\overline{\Delta \mathrm{P}}\rangle = 2.\langle \mathrm{p_{OEM}}\rangle.\mathrm{Vol} = \frac{2.\mathrm{I.Vol}}{\mathrm{c^2}}$$

Donde las llaves < > significan que es el promedio de lo que encierran.
Dado que la fuerza actúa durante un tiempo Δt, durante el cual la onda ocupa un volumen $\mathrm{A.c.}\Delta \mathrm{t}$:

$$\langle|\overline{\mathrm{F}}|\rangle.\Delta \mathrm{t} = \frac{2.\mathrm{I.A.c.}\Delta \mathrm{t}}{\mathrm{c^2}}$$

$$\langle|\overline{F}|\rangle = \frac{2.I.A}{c} = 9.33 \times 10^{-5} N$$

Si la vela hubiera sido de color negro, de modo de absorber toda la luz, el empuje habría sido F=IA/c.

7) $E_{máx} = 1027.41\ V/m$

$$E_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T |\overline{E}|^2 dt} = \frac{E_{máx}}{\sqrt{2}} = 726.49\ V/m$$

$$\Delta V = \int_0^h \overline{E}.\overline{dl}$$

$$\Delta V_{ef} = \frac{E_{máx}.h}{\sqrt{2}} = 1307.68\ V$$

8) $E = h.f$

$$I = \frac{E}{Vol}.c = \frac{n.h.f}{A.c.\Delta t}.c = N.h.f$$

a)

$$N = \frac{I}{h.f} = 3 \times 10^{24} \frac{fotones}{m^2.seg}$$

b)

$$I = \frac{E}{Vol}.c = \frac{n.h.f}{Vol}.c$$

$$\frac{n}{Vol} = \frac{I}{h.f.c} = 1 \times 10^{16}\ fotones/m^3$$

9) Discuta.

10) Observando la gráfica de la densidad electrónica para la capa E en diciembre del hemisferio norte, obtenemos un valor de 10^5 electrones/cm^3 = 10^{11} electrones/m^3. De donde, respecto de los electrones de la capa:

$$f_C = 9\sqrt{N} = 2.8\ MHz$$

Ahora, respecto de los iones de O_2, éstos poseen una masa m=5.35 10^{-26}Kg, de donde:

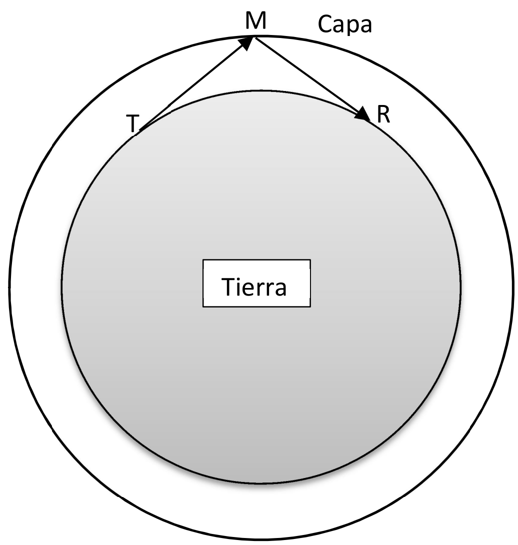
$$f_C = 0.037\sqrt{N} = 11.7\ KHz$$

¿De cuáles se puede sacar mayor provecho? ¿De los electrones o de los iones positivos?

11) Si suponemos la Tierra plana, el ángulo de incidencia es:

$$\phi_1 = arc\tan\left(\frac{D}{2H}\right)$$

Donde D es la distancia entre transmisor y receptor, mientras que H es la altura virtual de la capa. Esta es una buena aproximación si D es del orden de unos cientos de kilómetros. Sin embargo, si D es de miles de kilómetros, el error cometido en el ángulo puede llegar a los 10°. En ese caso podemos tener en cuenta la curvatura de la Tierra:



La distancia curva entre el transmisor (T) y el receptor (R) es "D". El ángulo (en radianes) entre la vertical y el punto T, con origen en el centro de la Tierra, es:

$$\theta = \frac{D/2}{R_T}$$

Donde R_T es el radio de la Tierra.
Si ponemos el origen en el centro de la Tierra, la posición del punto M es $(0,R_T+H)$, donde H es la altura virtual de la capa. Por otro lado, la posición del punto T es $(-R_T \sin\theta, R_T \cos\theta)$.
La pendiente de la recta MR respecto de la horizontal es entonces:

$$m = \frac{R_T\,(1-\cos\theta)+H}{R_T \sin\theta}$$

El ángulo de incidencia es el complementario del ángulo de la pendiente. Entonces, el ángulo de incidencia es:

$$\phi = \arctan\left[\frac{R_T\ \sin\left(\frac{D}{2\,R_T}\right)}{R_T\ \left[1-\cos\left(\frac{D}{2\,R_T}\right)\right]+H}\right]$$

El radio de la Tierra es de aproximadamente 40000Km/(2π)=6370Km. De las gráficas obtenemos el valor de H para la capa F en invierno a la medianoche, que es de 300Km.
Entonces, para D=200Km, ϕ=18.4°, y f_{MAX}=2.5MHz.
Y para D=4000Km, ϕ=72.7°, y f_{MAX}=8.0MHz.

12) A partir de la ecuación de la máxima frecuencia utilizable f_{MAX}, se obtiene:

$$\cos \phi_1 = \frac{9\sqrt{N}}{f}$$

Buscando datos en las gráficas, obtenemos, para la capa E: N=1.2 10^{11} electrones/m3, H=100Km, y para la capa F2: N=3.8 10^{11} electrones/m3, H=400Km.

De donde, para la capa E: cos(ϕ_1)=0.31, y para la capa F2: cos(ϕ_1)=0.55

Suponiendo la Tierra plana: para la capa E: $D = 2H \tan \phi_1 = 610$Km, y para la capa F2: D=1210Km

Entonces la distancia de la zona de silencio es de 610Km, ya que puede aprovecharse la reflexión en la capa E.

La distancia D es de unos pocos cientos de kilómetros, y eso justifica que hayamos supuesto la Tierra como plana. Si en cambio la distancia hubiera sido mayor, habría que haber despejado el ángulo θ (ver resultados del ejercicio anterior) en función de ϕ_1, lo que habría dado:

$$\theta = \arccos\left\{\frac{1}{R_T}\left[\sin^2\phi\,(R_T + H) + \cos^2\phi\,\sqrt{R_T^2 - 2R_T H \tan^2\phi - H^2\tan^2\phi}\right]\right\}$$

Si $\tan\phi < \frac{R_T}{\sqrt{H\,(2R_T + H)}}$

Y:

$$\theta = \arccos\left\{\frac{1}{R_T}\left[\sin^2\phi\,(R_T + H) - \cos^2\phi\,\sqrt{R_T^2 - 2R_T H \tan^2\phi - H^2\tan^2\phi}\right]\right\}$$

Si $\tan\phi > \frac{R_T}{\sqrt{H\,(2R_T + H)}}$

Luego, D=2$R_T\theta$ (con θ en radianes), de donde D=660Km, es decir 50Km más que considerando a la Tierra plana.

13) La onda sale al espacio exterior cuando no es reflejada. Esto es más fácil que ocurra para una onda que incide con ϕ_1=0. Entonces se trata de la frecuencia crítica de la última capa. En invierno a las 18Hs la última capa es la F, con N=10^{11} electrones/m^3. De donde f_C=2.85MHz.

14) Ambos cables están separados por vacío, de donde c=3 10^8 m/s

De $Z_o = \sqrt{\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{C}}}$ y $c = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{L}\mathcal{C}}}$ se pueden despejar $\mathcal{L}$ y $\mathcal{C}$

$$\mathcal{L} = \frac{Z_o}{c} = 2.5 \times 10^{-7}\ \mathrm{H/m}$$
$$\mathcal{C} = \frac{1}{\mathcal{L}\, c^2} = 4.44\ \times 10^{-11}\ \mathrm{F/m}$$

15) Como en $t = 0$ se aplica una tensión V_o en $x = 0$ en la línea, dicha tensión se propagará como onda con la velocidad de la luz hacia las x crecientes. En cualquier instante $t > 0$ la forma de $V(x,t)$, como función de x, será: $V(x) = V_o$ para $x < ct$ y $V(x) = 0$ para $x > ct$.
De la misma forma, en $t > 0$, la $I(x,t)$, como función de x, será de la siguiente forma: $I(x,t) = I_o = {}^{V_o}/_{Z_o}$ para $x < (ct)$ e $I(x) = 0$ para $x > (ct)$.
Observe que no sabemos cómo termina la línea (si hay una impedancia, si está cortocircuitada o si está abierta), pero igualmente, al propagarse la onda la línea comienza a conducir corriente a lo largo de la misma.

16) Discuta.

17) De lo aprendido en Física 2, sabemos que:

$$J = \sigma.E, \qquad I = J.A_T\,, \qquad B = \frac{\mu_o J r}{2}, \qquad R = \frac{L}{\sigma\pi r^2}$$

Donde J=densidad de corriente, σ=conductividad eléctrica del cable, E=campo eléctrico en el cable, A_T=área transversal del cable, r=radio del cable, R=resistencia del cable, L=longitud del cable.
Entonces, el flujo de $\overline{S}$ es:

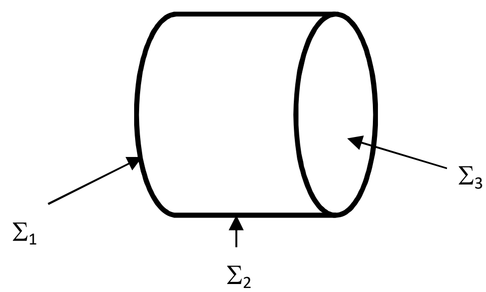
$$\phi_S = \int \overline{S}.\overline{dA} = S.A_L = \frac{E\ B\ A_L}{\mu} = \frac{\pi.J^2.r^2.L}{\sigma}$$

Donde A_L=área lateral del cable.
El calor generado por efecto Joule es:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = I^2.R = \frac{\pi.J^2.r^2.L}{\sigma}$$

Por supuesto, coincide el flujo del S que entra al cable con el calor generado por efecto Joule por dicho cable.

18) Se elige una superficie cilíndrica Σ que tiene el mismo radio r que las placas del capacitor y la misma longitud que la distancia d entre las placas. Se subdivide esa superficie cerrada en Σ_1 y Σ_3 (tapas), y Σ_2 (superficie lateral).



a) $|\overline{E}| = E_o$ en toda la superficie Σ_2, paralelo a ella y dirigido de placa a placa.
$|\overline{E}| = E_o$ perpendicular a las superficies Σ_1 y Σ_3.

b) Por Ampere-Maxwell en cualquier circunferencia paralela a las placas

$$|\overline{B}| = \left(\frac{\varepsilon_o \mu_o r}{2}\right) \frac{\partial E_o}{\partial t}$$

c) $\overline{S}$ perpendicular a la superficie Σ_2

$$S = \frac{E.B}{\mu_o} = \left(\frac{\varepsilon_o r}{2}\right)\left(\frac{\partial E_o}{\partial t}\right) E_o$$

d) La energía eléctrica almacenada en el capacitor es

$$U_{elec} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2\, Vol = \frac{\pi r^2 d\, E_o^2 \varepsilon_o}{2}$$

La variación de la energía es

$$\frac{\partial U_{elec}}{\partial t} = \pi r^2 d\, \varepsilon_o E_o \frac{\partial E_o}{\partial t}$$

La corriente de energía I_U es el flujo de $\overline{S}$

$$I_U = \phi_S = \int \overline{S}.\overline{dA} = S.A_L = S.2\pi.r.d = \pi r^2 d\, \varepsilon_o E_o \frac{\partial E_o}{\partial t}$$