Guía de problemas capítulo 8

1. Objetivos

1. Reconocer similitudes y diferencias entre el caso clásico y el caso cuántico
2. Análisis de casos simples de partículas cuánticas de movimiento unidimensional, sometidas a una energía potencial variable con la posición

2. La ecuación de Schrödinger

1. Una forma de entender la Ecuación de Schrödinger independiente del tiempo es a través de la Ecuación de onda independiente del tiempo, también llamada Ecuación de Helmholtz. Ensaye una solución de la ecuación de onda $y(x,t) = \varphi(x)\ e^{-i\omega t}$. Esta función es más complicada que una simple onda armónica viajera pero posee una frecuencia bien definida. Escriba la ecuación que debe satisfacer $\varphi(x)$ y utilícela para hallar los modos de oscilación de una cuerda vibrante de longitud L con un extremo fijo y otro libre.
2. Repita el procedimiento del problema anterior para el caso de la Ecuación de Schrödinger, en la cual existe energía potencial $V(x)$ distinta de cero (la partícula descripta no es libre pero su energía total se conserva). Obtenga la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo.
3. Escriba la ecuación de onda de Schrödinger dependiente del tiempo y a continuación, la misma ecuación pero conjugando ambos miembros. Operando con ambas ecuaciones trate de deducir una ecuación de continuidad para $|\psi|^2 = \rho$. Recuerde la expresión de las ecuaciones de continuidad que Ud. aprendió al estudiar la conservación de la carga, la masa y la energía. ¿Cuál es ahora el vector densidad de corriente $\vec{J}$?

3. Partículas clásicas y cuánticas sometidas a fuerzas conservativas

4. La Fig. 1 muestra la curva típica de montaña rusa en la cual un carrito que parte del reposo en el punto A se deja deslizar sin roce. Encuentre los puntos de retorno suponiendo que el carrito se encuentra en un campo gravitatorio uniforme ($g = 10\ m/s^2$). Describa el movimiento que realizará el carrito.

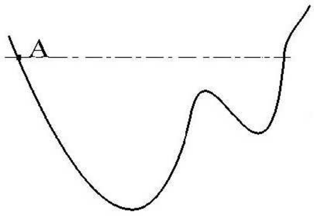

Figura 1.

5. Repita el análisis del Problema 4 para el caso de la Fig. 2, suponiendo que el carrito inicia su movimiento en el punto A con una velocidad de:
   a) 35 m/s
   b) 20 m/s
   c) 15 m/s
   d) 10 m/s.

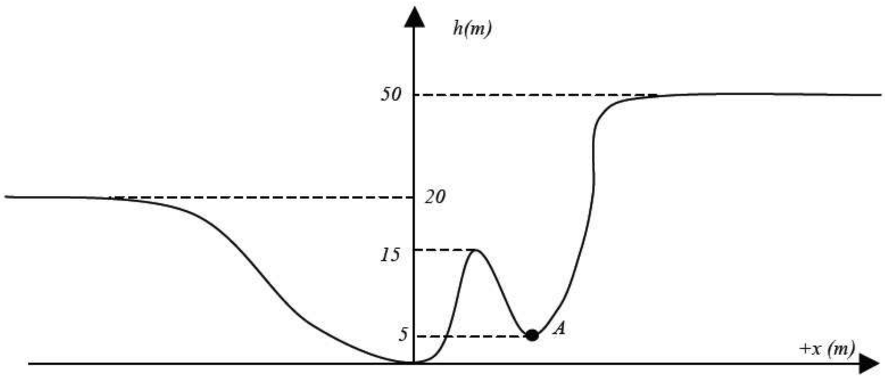

Figura 2.

6. Sea un escalón de potencial de $V = V_0 = 1000\ eV$ para $x > 0$ y $V = 0$ para $x < 0$.
   a) Describa el movimiento y determine el coeficiente de Reflexión y de Transmisión para electrones clásicos, acelerados con 10000 V incidiendo desde la izquierda.
   b) Describa el movimiento y determine el coeficiente de Reflexión y de Transmisión para electrones clásicos, acelerados con 100 V incidiendo desde la izquierda.
   c) Resuelva la ESDT y determine el coeficiente de Reflexión y de Transmisión para electrones cuánticos, acelerados con 10000 V incidiendo desde la izquierda.
   d) Resuelva la ESDT y determine el coeficiente de Reflexión y de Transmisión para electrones cuánticos, acelerados con 100 V incidiendo desde la izquierda.

7. Analice el caso de partículas clásicas y cuánticas incidiendo contra una pared infinita.
8. Analice el caso de partículas clásicas y cuánticas de energía 10000 eV incidiendo contra una barrera tipo delta de peso $P = 1000\ eV.m.$
9. Analice el caso de partículas clásicas y cuánticas dentro de un pozo infinito de ancho a. Considere dos valores de a: $a = 1\ nm$ y $a = 1\ m$.
   Para cada caso obtenga la solución de la ESDT y determine los niveles de energía permitidos para las partículas cuánticas. Grafique las tres funciones de onda de más baja energía.
10. Una barrera típica de potencial para un electrón interatómico tiene un ancho de 0.1nm y una altura de 5eV. La grilla de brillo de un monitor de televisión puede tener un potencial del orden de los $-100\ V$ y un espesor del orden del milímetro. Calcular el coeficiente de transmisión cuántico de esa barrera para electrones con energías cinéticas iguales a la altura de la barrera. ¿Cuál sería en el caso clásico el correspondiente coeficiente de transmisión?
11. Por definición los coeficientes de reflexión y transmisión cuánticos están dados por $R = -\vec{J}_r/\vec{J}_i$ y $T = \vec{J}_t/\vec{J}_i$ respectivamente, donde $\vec{J}_i$, $\vec{J}_r$ y $\vec{J}_t$ son las *corrientes de probabilidad* incidente, reflejada y transmitida respectivamente. Halle las expresiones de estos coeficientes en función de la energía E de las partículas y de los parámetros que definen la energía potencial (V_0, a) para los siguientes casos:
    a) Un escalón de altura V_0;
    b) Una barrera rectangular de altura V_0 y ancho a.
    c) Una barrera delta de peso $P = V_0 a$.
12. Para el pozo de potencial con paredes de altura V_0 encuentre las energías permitidas para los estados estacionarios sin recurrir al uso de funciones pares e impares. Compruebe que su resultado coincide con el que se obtiene empleando funciones pares e impares (ver ecuaciones 7.4:4a y 7.4:4b del libro de la cátedra). Compruebe que cuando $V_0 \to \infty$ los resultados coinciden con los del problema 9.
13. Para el caso del pozo infinito suponga que se prepara una partícula con función de onda dada por la suma de la del estado de energía más baja, pesada con un factor 0.5, mas la del primer estado excitado pesada con un factor 1. Grafique el cuadrado del módulo de la función de estado resultante, para distintos instantes de tiempo. ¿Qué es lo que observa?