Guía de problemas capítulo 7

1. Objetivos

1. Comportamiento de la luz como onda y como partícula.
2. Experimentos cruciales: el efecto fotoeléctrico.
3. Las partículas también son ondas.
4. Batidos y construcción de paquetes de ondas.
5. Ecuación de Schrödinger.

2. La luz como partícula

1. La energía de arranque fotoeléctrico del potasio es $2eV$. Suponiendo que sobre él incide luz de $\lambda = 3.6\times10^{-7}m$ hallar:
   a) el potencial que detiene a los fotoelectrones,
   b) la energía cinética y la velocidad de los más rápidos electrones liberados.
2. Cuando se ilumina cierta superficie metálica con luz de diferentes longitudes de onda, se miden los potenciales de detención de los fotoelectrones indicados en la tabla. Representar el potencial de detención en función de la frecuencia de la luz. Determinar del gráfico:
   a) el umbral de frecuencia,
   b) la energía de arranque fotoeléctrico del metal,
   c) la razón h/e.

$\lambda(\times10^{-7}m)$	$V(Volts)$
3.66	1.48
4.05	1.15
4.36	0.93
4.92	0.62
5.46	0.36
5.79	0.24

3. Atomo de Bohr

3. Mediante el modelo del átomo de Bohr:
   a) Calcular la velocidad angular del electrón como función del número cuántico "n".
   b) Demostrar que, cuando $n \gg 1$, la frecuencia del fotón emitido por la transición del electrón coincide con la frecuencia clásica de rotación.
   c) ¿Qué variación experimenta la energía cinética del electrón cuando emite un fotón de longitud de onda $\lambda = 4860\mathring{A}$?.
4. Supongamos que se bombardea hidrógeno atómico en estado fundamental, con electrones que tienen una energía E=12.2eV.
   a) ¿Qué líneas del espectro de emisión se observan?.
   b) Si se bombardea la misma muestra con electrones de 9eV, ¿qué líneas se observan?.
   c) ¿Qué energía debe tener el haz de electrones si se detecta en el espectro de emisión una línea perteneciente a la serie de Brackett (transición de $n = 5 \rightarrow n = 4$)?.
5. *a*) Mediante el uso de la hipótesis de De Broglie muestre que los radios correspondientes a los estados estacionarios del átomo de hidrógeno corresponden a niveles donde la función de onda de los electrones experimentan interferencia constructiva.
   b) Calcule la longitud de onda de los electrones como función de la longitud de onda del estado fundamental.
6. *a*) Calcular la corriente debida a un electrón en la primera órbita de Bohr.
   b) Calcular el momento magnético del electrón en dicha órbita (magnetón de Bohr).

4. Longitud de onda de De Broglie

7. Sea un neutrón térmico, es decir un neutrón que se desplaza con la velocidad típica de una partícula atmosférica a la temperatura ambiente (su energía cinética vale $\frac{3}{2}kT$, con $k = 1.38\times10^{-23}J/K$ y T la temperatura absoluta). Encuentre la longitud de onda de De Broglie para tal neutrón. ¿Puede realizar experimentos de difracción de neutrones en esas condiciones? (m_n =masa del neutrón $=1.67\times10^{-27}kg$).
8. ¿A través de qué diferencia de potencial deben ser acelerados electrones ($q = 1.6\times10^{-19}C$, $m = 9.1\times10^{-31}kg$) para que su longitud de onda de De Broglie sea de tamaño típico del entramado interactómico "d" de un cristal ($d \cong 1nm$)?

9. Complete el cuadro siguiente indicando la longitud de onda central del paquete de ondas que representaría las siguientes partículas

PARTÍCULA	MASA (kg)	VELOCIDAD (m/s)	λ (nm)
Bolita	2×10^{-2}	1×10^{-2}	
Esfera de látex	1×10^{-15}	3×10^{-4}	
Partículas α de $1MeV$	6.7×10^{-27}	6.9×10^{6}	
Protón de $1MeV$	1.7×10^{-27}	1.4×10^{7}	
Electrón de $100ev$	9.1×10^{-31}	5.9×10^{6}	
Neutrón de 0.1 ev	1.7×10^{-27}	4.3×10^{3}	

10. Calcular la longitud de onda central del paquete de ondas que representa un electrón acelerado mediante una diferencia de potencial de $110V$. Compararla con la longitud de onda de una OEM en el rango de rayos X.

5. Efecto Compton

11. Calcular la energía máxima, expresada en eV, transferida a un electrón por dispersión Compton si los fotones incidentes tienen una longitud de onda de 0.05nm.
12. Un fotón de 100keV es dispersado por un electrón inicialmente en reposo. Hallar la energía adquirida por el electrón en el proceso si el ángulo de dispersión del fotón es π.

6. Principio de incertidumbre y paquetes de onda

13. Se mide la posición de un insecto de masa $10g$ con un error de $1nm$. Determinar la incertidumbre en su velocidad para no violar el principio de incerteza.
14. Un haz angosto, de protones monoenergéticos llega a una ranura aún más angosta que el haz, sobre una pantalla opaca. Trace los diagramas que indiquen la figura que se formará sobre la pantalla a tiempos cada vez mayores. ¿Qué diferencia habría si el haz no fuera monoenergético?
15. Un estado atómico excitado normal tiene una vida media de $10^{-8}s$. Dentro de ese tiempo se produce la caída al estado de energía más baja. Determinar la incertidumbre mínima en la energía del fotón generado en la transición, en J y en eV. Calcule el ancho de la línea espectral producida.
16. Dos ondas armónicas se mueven simultáneamente a lo largo de un alambre largo. Sus funciones de onda vienen dadas por:

$$y_1 = 0.002\,cos(6.01x - 601t)$$

$$y_2 = 0.002\,cos(5.99x - 599t)$$

con x y t en unidades del SI. Hallar la onda resultante. ¿Cuáles son sus velocidades de fase y de grupo? ¿Es éste un fenómeno dispersivo?

17. Cuando se toca una cuerda de violín al mismo tiempo que un diapasón de frecuencia $400Hz$ se oyen los batidos de la cuerda a un ritmo de tres por segundo. Cuando la tensión de la cuerda aumenta ligeramente, disminuye la frecuencia de los batidos. ¿Cuál es la frecuencia inicial de la cuerda del violín? Nota: recuerde que cuando una cuerda es traccionada aumenta su frencuencia.
18. Analice la velocidad de grupo del paquete de ondas que se forma en aguas marinas teniendo en cuenta que, en aguas profundas la velocidad de fase vale $v_f^2 = g/k$, mientras que para aguas playas $v_f^2 = hg$. ¿En qué casos la relación es dispersiva?
19. Halle la gráfica para $t = 0$ de los batidos que se producen sumando tres ondas, luego cinco ondas, y luego siete ondas de frecuencias muy parecidas, todas ellas con la misma velocidad de fase pero, con vectores de onda y pulsaciones dados por $k_n = k_0 \pm \delta k\ n$ y $\omega_n = \omega_0 \pm \delta\omega\ n$. Encuentre para cada caso cuánto vale el producto $\Delta k\ \Delta x$ donde Δk es el ancho del paquete en k en tanto que Δx, es la extensión del paquete en x. Discuta qué sucede con la energía, en especial, en qué regiones espaciales va a aparecer más localizada. Finalmente discuta la evolución temporal del paquete.
20. Imagine que una antena o un láser o máser, en régimen pulsado, está produciendo trenes de onda electromagnéticos (paquetes de onda) de una extensión finita, digamos $\Delta x = 10^{-6}m$. Por otra parte está Ud. emitiendo tan poca potencia, que está seguro de no enviar más de un paquete por segundo al aire. ¿Cómo describiría Ud. la llegada de esos paquetes al detector (o receptor)? ¿Sería un proceso continuo o discreto?. Conociendo que la OEM pueden producir empuje, ¿sería continuo o discreto este empuje en el receptor? Discuta.
21. *a*) En el problema anterior, cuál sería el valor más probable de la longitud de onda promedio del paquete: $\lambda = 10^{-4}m$, $\lambda = 10^{-6}m$, $\lambda = 10^{-8}m$.
    b) Suponga ahora que la OEM del mismo problema anterior atraviesa una pantalla provista de dos rendijas. ¿Aparecerá el fenómeno de interferencia?
22. De acuerdo a lo discutido en los tres problemas anteriores, ¿qué observaría en la pantalla colocada luego de las dos rendijas, a medida que pasa el tiempo y van arribando los paquetes?
23. A la luz del principio de incerteza de Heisenberg discuta la posibilidad de comportamiento ondulatorio en los siguientes casos: a) una partícula de polvo, de $1\mu m$ de diámetro, masa $m \cong 10^{-15}kg$ y velocidad $v = 1mm/s$.

b) Un electrón en órbita atómica (Sugerencia: trate de ver si es posible que las indeterminaciones Δx y Δp son despreciables con respecto a los tamaños e ímpetus involucrados).

24. Si la longitud del paquete de onda del electrón de la figura es de $200nm$, ¿cuánto vale la indeterminación mínima en la energía del electrón?

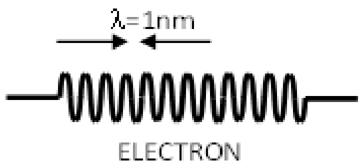

Figura 1.

25. Repita el ejercicio anterior, pero ahora tratándose de un fotón, de longitud de onda piloto de $1nm$, y longitud de paquete de onda de $200nm$.
26. Fotones con longitud de onda central $\lambda_0 = 250nm$, y cada uno con indeterminación Δx =0.1mm, forman un rayo con intensidad $I = 100W/m^2$ que inciden sobre una placa de metal (ver Fig. 2). Allí, por efecto fotoeléctrico, se liberan electrones, de modo que los más rápidos apenas llegan con velocidad casi nula a la rendija angosta. Luego se aceleran con diferencia de potencial ΔV y llegan como ondículas planas al arreglo de 2 rendijas, cada una de ancho $10nm$ y separadas entre centros en $100nm$. En la pantalla, el primer mínimo del diagrama resultante se encuentra a 0.005rad por encima del centro.

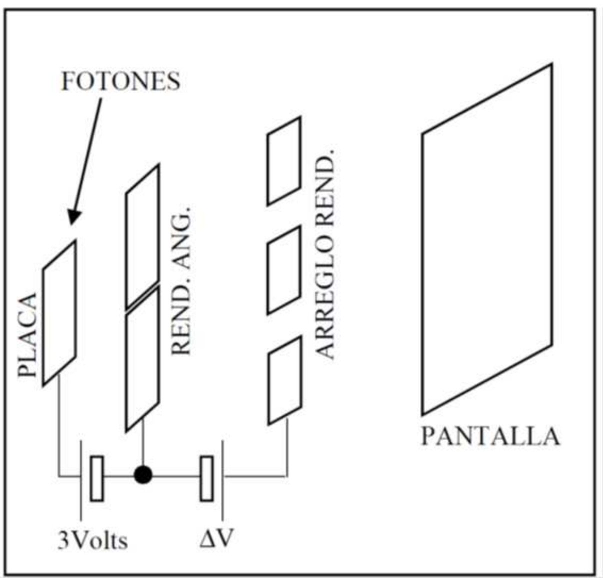

Figura 2.

a) ¿Cuántos fotones por unidad de área y por unidad de tiempo posee el rayo que incide sobre la placa?

b) ¿Cuánto vale la función trabajo en Joules del metal de la placa?

c) ¿Cuánto vale la indeterminación de la energía en cada uno de los fotones incidentes?

d) ¿Cuál es el valor de ΔV?