Guía de problemas capítulo 0

1 Objetivos

(1) Reconocer funciones 1D viajeras.
(2) Dar ejemplos de ondas 1D en medios de 1, 2 y 3 dimensiones.
(3) Características de la función armónica viajera.
(4) Noción de ondas esféricas y cilíndricas.

2 Problemas básicos

(1) Sea la función de una variable

$$f(x,t=0)=\begin{cases} F_0 & \cdots\ |x|\leqslant 0.03 \\ 0 & \cdots\ |x|>0.03\ . \end{cases} \tag{1}$$

(a) Conviértala en una función viajera que se desplace según $+x$ con c =0.02.
(b) Grafíquela en los instantes $t=0$, $t=1$, $t=6$.

(2) Justifique cuáles de las siguientes funciones constituyen una onda y cuáles no lo son:

(a) $$f(x,t)=sen(kx) \tag{2}$$
(b) $$f(x,t)=Acos[\omega t+\phi] \tag{3}$$
(c) $$f(x,t)=cos(kx+\omega t)+sen(\pi/2-kr-\omega t)/(3r) \tag{4}$$

(3) Considere la onda armónica plana (unidimensional) dada por la ecuación

$$f(x,t)=2cos[2\pi\ 10^{14}(t-x/c)+\pi/2], \tag{5}$$

con $c=3\times10^8 m/s$, x en metros y t en segundos. Indique la frecuencia f, la longitud de onda λ, la amplitud A, la fase inicial δ, el período T, la frecuencia espacial ν y el sentido de movimiento de dicha onda.

(4) Una onda armónica unidimensional $f(x,t)$, se propaga según $+x$. En $x=0$ la perturbación es máxima para $t=T/4$. En ese mismo instante otras partículas del medio tienen una perturbación igual a 1/2 del valor máximo. La longitud de onda es $\lambda=1.8m$. Determinar a que distancia se encuentran las partículas más cercanas al origen que tienen esa perturbación.

3 Problemas Adicionales

(5) La función

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \cdots \ |x| < 2 \\ 0 & \cdots \ |x| > 2 \ . \end{cases} \tag{6}$$

tiene la forma de un pulso.

(a) Dibújela.

(b) Conviértala en un pulso viajero, que se desplaza hacia $-x$ con velocidad $c = 2m/s$.

(c) Dibuje la velocidad $v = \partial\Phi/\partial t$, como función de x, en el instante $t = 0$.

(d) Dibujar la pendiente de la cuerda, $\partial\Phi/\partial x$, como función de x, en el instante $t = 0$.

(e) Comparar las dos expresiones.

(6) Una onda armónica plana, de longitud de onda $\lambda = 1m$, se desplaza en el espacio $3D$ con velocidad $c = 1m/s$. La dirección de propagación es paralela a la recta $y = 3x$. Escribir la expresión de la onda utilizando los ejes cartesianos y utilizando ejes rotados de forma conveniente.

(7) La ecuación de ondas $3D$ es:

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}. \tag{7}$$

En coordenadas esféricas, y para el caso de funciones $\psi(r, \theta, \phi) = \psi(r)$ esta ecuación es equivalente a:

$$\frac{\partial^2(r\ \psi)}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2(r\ \psi)}{\partial t^2}. \tag{8}$$

(a) Encuentre la forma de una onda esférica armónica en base a la solución de la ecuación de ondas planas $1D$ que ya conoce.

(b) Expresando el laplaciano en coordenadas esféricas escriba la ecuación de ondas $3D$ en coordenadas esféricas para el caso general de ondas $\psi(x, y, z, t)$.

(8) La distancia Tierra-Sol es aproximadamente $150 \times 10^6 km$. Si tuviese que estudiar la evolución espacio-temporal de una onda luminosa que partiendo del Sol se dirige a nuestro planeta, qué modelo matemático usaría, una onda plana o una esférica? Discuta.