

Guía de problemas capítulo 0

1 Objetivos

- (1) Reconocer funciones 1D viajeras.
- (2) Dar ejemplos de ondas 1D en medios de 1, 2 y 3 dimensiones.
- (3) Características de la función armónica viajera.
- (4) Noción de ondas esféricas y cilíndricas.

2 Problemas básicos

- (1) Sea la función de una variable

$$f(x, t = 0) = \begin{cases} F_0 & \dots |x| \leq 0.03 \\ 0 & \dots |x| > 0.03 . \end{cases} \quad (1)$$

- (a) Conviértala en una función viajera que se desplace según $+x$ con $c=0.02$.
- (b) Gráfiquela en los instantes $t = 0, t = 1, t = 6$.
- (2) Justifique cuáles de las siguientes funciones constituyen una onda y cuáles no lo son:
 - (a) $f(x, t) = \text{sen}(kx)$ (2)
 - (b) $f(x, t) = \text{Acos}[\omega t + \phi]$ (3)
 - (c) $f(x, t) = \text{cos}(kx + \omega t) + \text{sen}(\pi/2 - kr - \omega t)/(3r)$ (4)
- (3) Considere la onda armónica plana (unidimensional) dada por la ecuación

$$f(x, t) = 2\text{cos}[2\pi \cdot 10^{14}(t - x/c) + \pi/2], \quad (5)$$

con $c = 3 \times 10^8 \text{m/s}$, x en metros y t en segundos. Indique la frecuencia f , la longitud de onda λ , la amplitud A , la fase inicial δ , el período T , la frecuencia espacial ν y el sentido de movimiento de dicha onda.

- (4) Una onda armónica unidimensional $f(x, t)$, se propaga según $+x$. En $x = 0$ la perturbación es máxima para $t = T/4$. En ese mismo instante otras partículas del medio tienen una perturbación igual a $1/2$ del valor máximo. La longitud de onda es $\lambda = 1.8\text{m}$. Determinar a que distancia se encuentran las partículas más cercanas al origen que tienen esa perturbación.

3 Problemas Adicionales

- (5) La función

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \cdots |x| < 2 \\ 0 & \cdots |x| > 2 . \end{cases} \quad (6)$$

tiene la forma de un pulso.

- Dibújela.
 - Conviértala en un pulso viajero, que se desplaza hacia $-x$ con velocidad $c = 2m/s$.
 - Dibuje la velocidad $v = \partial\Phi/\partial t$, como función de x , en el instante $t = 0$.
 - Dibujar la pendiente de la cuerda, $\partial\Phi/\partial x$, como función de x , en el instante $t = 0$.
 - Comparar las dos expresiones.
- (6) Una onda armónica plana, de longitud de onda $\lambda = 1m$, se desplaza en el espacio $3D$ con velocidad $c = 1m/s$. La dirección de propagación es paralela a la recta $y = 3x$. Escribir la expresión de la onda utilizando los ejes cartesianos y utilizando ejes rotados de forma conveniente.
- (7) La ecuación de ondas $3D$ es:

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}. \quad (7)$$

En coordenadas esféricas, y para el caso de funciones $\psi(r, \theta, \phi) = \psi(r)$ esta ecuación es equivalente a:

$$\frac{\partial^2(r\psi)}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2(r\psi)}{\partial t^2}. \quad (8)$$

- Encuentre la forma de una onda esférica armónica en base a la solución de la ecuación de ondas planas $1D$ que ya conoce.
 - Expresando el laplaciano en coordenadas esféricas escriba la ecuación de ondas $3D$ en coordenadas esféricas para el caso general de ondas $\psi(x, y, z, t)$.
- (8) La distancia Tierra-Sol es aproximadamente $150 \times 10^6 km$. Si tuviese que estudiar la evolución espacio-temporal de una onda luminosa que partiendo del Sol se dirige a nuestro planeta, qué modelo matemático usaría, una onda plana o una esférica? Discuta.