

Apunte de clase de la Bolilla 1

Año 2022

Daniel Zarlenga

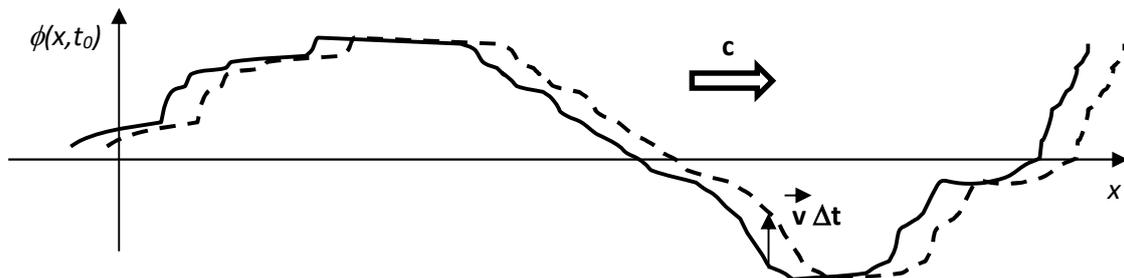
Bibliografía: Ondulatoria Elemental (Larrondo – Avalos)

Ondas en cuerdas

En cuerdas, la función $\phi(x,t)$ representa el apartamiento de la cuerda respecto al punto de equilibrio (la horizontal). La función de onda $\phi(x,t)$ se mide en metros.



Por supuesto esta función es una onda que se mueve hacia $+x$ o hacia $-x$. Por ejemplo:



Donde la línea llena es la función de onda para tiempo t_0 , mientras que la punteada es para tiempo $t_0 + \Delta t$. Da la apariencia de que los puntos de la cuerda se hubieran movido según " x " en una distancia $(c \Delta t)$, pero no lo hicieron: la información de la onda se movió según " x " pero los puntos de la cuerda se movieron verticalmente como lo indica el vector $\vec{v} \Delta t$. Cada punto va propagando su posición vertical, en este caso hacia su punto más inmediato hacia $+x$.

Vamos a expresar la velocidad de propagación para una cuerda en la que se cumplen las siguientes condiciones:

- La cuerda es inextensible \rightarrow los puntos de la cuerda no se mueven según " x "
- La tensión $T \gg$ (masa de la cuerda * g) \rightarrow peso despreciable
- Angulos de la cuerda $d\phi/dx$ pequeños

La masa de la cuerda está distribuida uniformemente, de modo que se define la masa por unidad de longitud: μ [Kg/m].

Es demostrable (ver libro de la cátedra) que la velocidad de propagación de la onda es:

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad [m/s]$$

Es importante aclarar que los puntos de la cuerda se mueven verticalmente (por ser la cuerda inextensible). Entonces la velocidad de los puntos es en sentido vertical, y vale:

$$v(x, t) = \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad [m/s]$$

No hay que confundir a $v(x, t)$, que es una función, con la velocidad de propagación c , que es una constante.

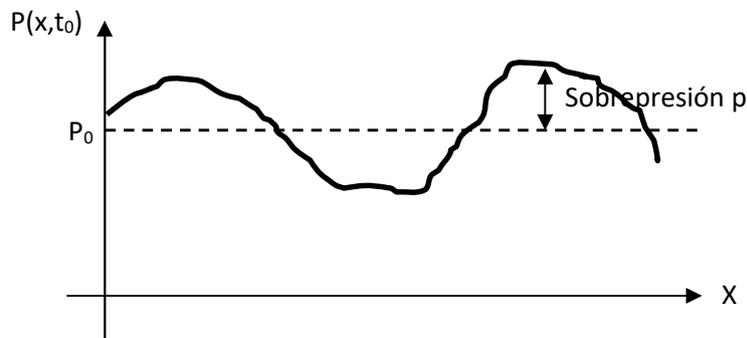
Dado que los puntos de la cuerda se mueven perpendicularmente al sentido de propagación, a la onda en cuerda se la llama "transversal".

Ondas sonoras en fluidos

En la onda sonora en fluidos, puede decirse que hay dos ondas relacionadas entre sí. Una de ellas es la onda de sobrepresión.

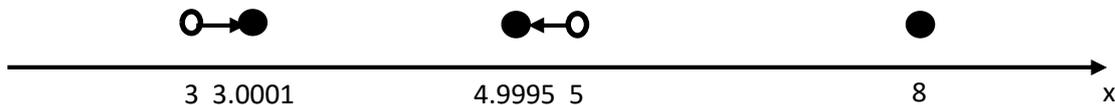
¿En qué consiste la sobrepresión? Supongamos que el medio de propagación es aire por ejemplo. En ausencia de sonido la presión es la presión atmosférica P_0 . Pero al haber sonido, éste produce compresiones y enrarecimientos del aire, por lo que a la presión atmosférica P_0 hay que sumarle la sobrepresión $p(x,y,z,t)$, para llegar a la presión total $P(x,y,z,t)$

$$P(x,y,z,t) = P_0 + p(x,y,z,t) \quad [\text{Pa}]$$



Debe remarcarse que con sonidos normales los valores que toma la sobrepresión son mucho menores que la presión atmosférica. La presión absoluta P siempre es positiva.

Hay además una onda de desplazamiento $\vec{\phi}(x, y, z, t)$, que indica cuánto están desplazadas las partículas de aire respecto al equilibrio. Este desplazamiento es a causa del sonido. Veamos un ejemplo de una sola variable espacial "x". Supongamos que, para $t=t_0$, la partícula que en equilibrio debería estar en $x=3$ está en $x=3.0001$. Y que la partícula que debería estar en $x=5$ está en $x=4.9995$. Y que la partícula que debería estar en $x=8$ está en $x=8$.



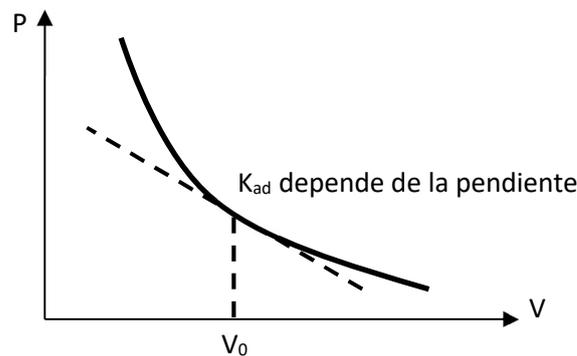
Entonces en este ejemplo $x(3,t_0)=0.0001\text{m}$, $x(5,t_0)=-0.0005\text{m}$, $x(8,t_0)=0$.

Dado que la función desplazamiento ϕ se mide en la misma dirección que la propagación de la onda, entonces la onda sonora se clasifica como "longitudinal" (a diferencia de la onda en cuerdas que eran transversales).

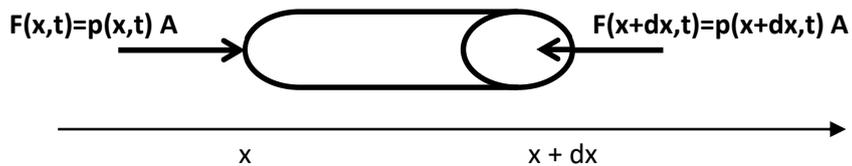
Deduzcamos la velocidad de propagación de la onda sonora en fluidos. Todos los fluidos son, en mayor o menor medida, compresibles. Cuán compresibles son está dado por el coeficiente de compresibilidad. El sonido es de frecuencias suficientemente alta como para afirmar que su compresión ocurre tan rápido que no hay intercambio de calor hacia él. Entonces el coeficiente de compresibilidad a tener en cuenta es el adiabático K_{ad} , definido como:

$$K_{ad} = -\frac{\frac{\Delta V}{V_0}}{\Delta P} \quad [Pa^{-1}]$$

Y se relaciona con la curva adiabática P versus V del fluido:



La velocidad de propagación se deduce a partir de dos ecuaciones: la primera surge de las leyes de Newton. Consideremos una porción de fluido entre x y $x+dx$:



Entonces:

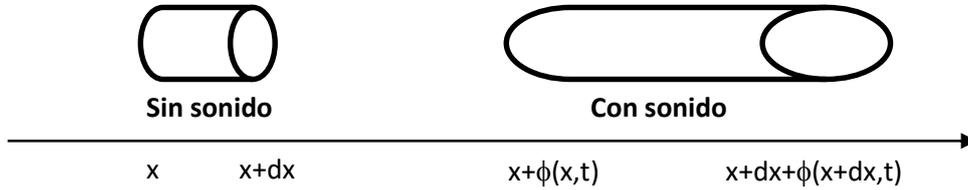
$$\sum F_x = p(x, t)A - p(x + dx, t)A = m a_x = \delta A dx \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$$

De donde:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \delta \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (1)$$

Donde δ es la densidad del fluido [Kg/m^3]. Esta es la primera ecuación.

La segunda sale de considerar la compresión del fluido: consideremos una porción del fluido que, en ausencia de sonido, ocupa entre x y $x+dx$. Al existir sonido va a ocupar entre $[x+\phi(x,t)]$ y $[x+dx+\phi(x+dx,t)]$.



El volumen inicial (sin sonido) es $V_0=Adx$, mientras que el crecimiento del volumen será el volumen final menos el inicial, $\Delta V= \{ A[\phi(x+dx,t) - \phi(x,t) +dx] - Adx\} = A d\phi$. Entonces:

$$K_{ad} = -\frac{\Delta V}{\Delta P} = -\frac{Ad\phi}{p}$$

De donde surge la segunda ecuación:

$$p(x, t) = -\frac{1}{K_{ad}} \frac{d\phi(x, t)}{dx} \quad (2)$$

Recuérdela, porque es la ecuación que permite hallar la función $p(x,t)$ si se conoce $\phi(x,t)$, y permite hallar $\phi(x,t)$ si se conoce $p(x,t)$. La combinación de (1) con (2) lleva a:

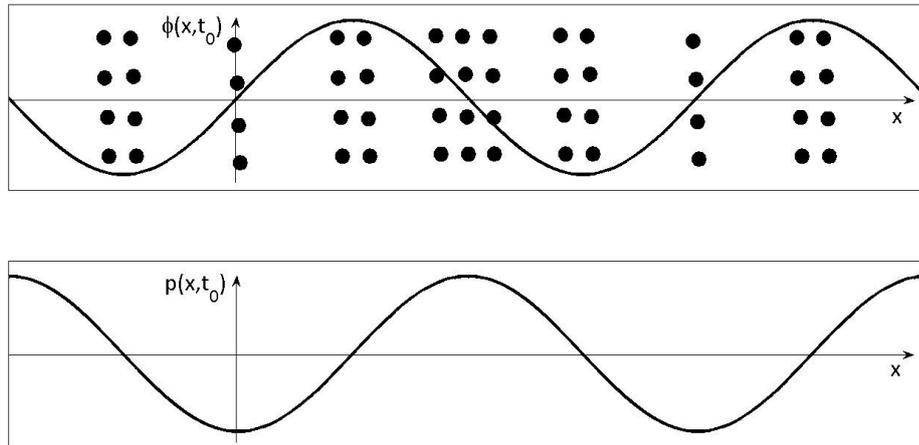
$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = K_{ad} \delta \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$$

De donde:

$$c = \sqrt{\frac{1}{K_{ad} \delta}} \quad \left[\frac{m}{s} \right]$$

Para el aire, $K_{ad} = 7 \cdot 10^{-6} \text{ Pa}^{-1}$, $\delta = 1,2 \text{ Kg m}^{-3}$, de donde $c \cong 340 \text{ m/s}$, valor que usaremos por defecto. Si hubiera cambio de la temperatura ambiente, esto afectaría la densidad del gas. Un incremento en T produciría una disminución de la densidad, prevista aproximadamente por la ley de los gases ideales. Por lo tanto, se produciría un aumento de c . La velocidad c es proporcional entonces a la raíz de la temperatura absoluta del gas en que se propaga.

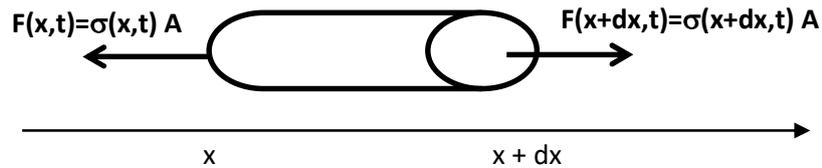
En resumen, para ondas sonoras en fluidos existen dos funciones de onda relacionadas entre sí, que son la de desplazamiento y la de sobrepresión. Para entender mejor la relación entre ellas, analicemos la siguiente figura:



La acumulación de partículas del gas es proporcional a los puntos negros. Por ejemplo, medio ciclo a la derecha de $x=0$ el valor de ϕ es positivo. Medio ciclo a la izquierda de $x=0$ el valor de ϕ es negativo. Entonces, de acuerdo a la definición de ϕ que hemos visto, el origen se va a ver relativamente vaciado de partículas de gas. Habrá entonces un enrarecimiento del gas en $x=0$ y la sobrepresión será negativa, como se ve en el gráfico de abajo. Por supuesto el gráfico de abajo resulta a partir del de arriba si se usa la ecuación (1) reemplazando $\phi(x,t)=A \sin(kx - \omega t + \omega t_0)$ y despejando $p(x,t)$.

Onda sonora en sólidos

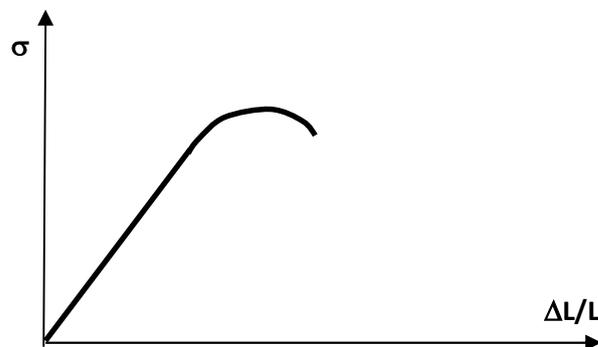
También son longitudinales. Hay dos ondas: la de desplazamiento y la de tracción. ¿Cómo se interpreta la tracción? La tracción σ se mide en Pascales, al igual que la presión, pero la tracción es de estiramiento. Es por esto que la ecuación (1) queda con el signo contrario al caso de sonido en fluidos:



Nótese que las fuerzas son de estiramiento. A partir de la segunda ley de Newton se llega a:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (3)$$

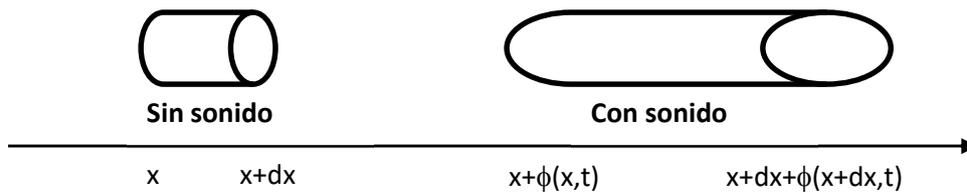
Falta otra ecuación que nos permita llegar a la velocidad de propagación. La misma surge del gráfico de la tracción σ en función del estiramiento relativo $\Delta L/L$.



Para sonidos, los valores de tracción σ son suficientemente bajos para estar en la parte lineal de la curva (ley de Hooke). La pendiente de esta recta se llama módulo de Young E:

$$E = \frac{\sigma}{\Delta L/L}$$

La función desplazamiento se interpreta exactamente igual que en el caso de sonido en fluidos.



Ahora $L=L \text{ inicial}=dx$. Por otro lado, $\Delta L = L \text{ final} - L \text{ inicial} = \Delta\phi$, de donde sale:

$$\sigma(x, t) = E \frac{d\phi(x, t)}{dx} \quad (4)$$

Recuérdela, porque es la ecuación que permite hallar la función $\sigma(x,t)$ si se conoce $\phi(x,t)$, y permite hallar $\phi(x,t)$ si se conoce $\sigma(x,t)$. La combinación de (3) con (4) lleva a:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\delta}{E} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$$

De donde:

$$c = \sqrt{\frac{E}{\delta}} \quad \left[\frac{m}{s}\right]$$

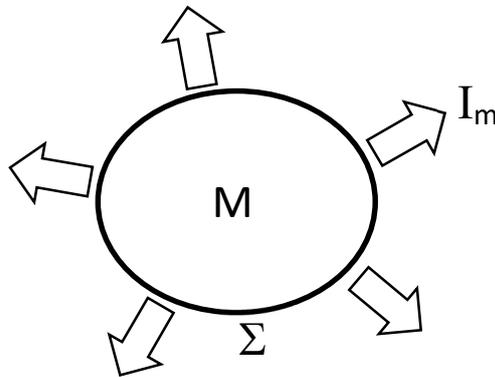
En resumen, para ondas sonoras en sólidos existen dos funciones de onda relacionadas entre sí, que son la de desplazamiento y la de tracción.

Corrientes y densidades de corriente

Sabemos que la carga eléctrica se conserva (no se puede crear carga eléctrica). Además, según la física clásica, se conservan tanto la masa como la energía.

Tanto la carga como la masa como la energía son cantidades escalares, es decir, no se necesita usar un vector para representarlas.

Definamos ahora la corriente. La mejor forma es a través de un ejemplo. Pongamos por ejemplo el caso de la masa. Tenemos una cantidad de masa M encerrada en un volumen V , cuyo borde es la superficie cerrada Σ . Dado que la masa se conserva (no puede crearse), la única forma de que la masa encerrada cambie es que una cantidad de masa atraviese la superficie Σ . La cantidad de masa por unidad de tiempo que atraviesa la superficie Σ se llama corriente de masa I_m .



Tenga en cuenta que las flechas del gráfico anterior sólo significan que se ha definido a I_m como positiva saliente, pero no dicen por cuáles de las paredes de Σ sale esta masa. Por ejemplo podría ser que entrara masa por el costado izquierdo de Σ , y saliera masa por el costado derecho en más cantidad, resultando en un valor positivo de I_m . O que entrara masa por el costado izquierdo de Σ , y saliera masa por el costado derecho en menor cantidad, resultando en un valor negativo de I_m . En resumen, I_m es un número que solamente expresa la cantidad neta de masa por unidad de tiempo [Kg/s] que sale de Σ .

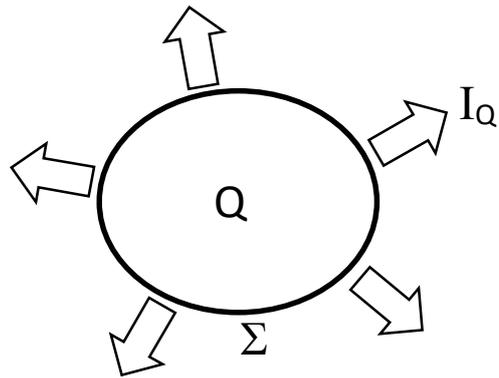
$$I_m = -\frac{dM}{dt}$$

Donde el signo menos es a causa de que hemos definido a I_m como positiva saliente.

Si en lugar de masa se trata de carga eléctrica Q encerrada por la superficie Σ , tendremos:

$$I_Q = -\frac{dQ}{dt} \quad \left[\frac{C}{s} = \text{Ampere} \right]$$

Resultando en la ya conocida corriente eléctrica I_Q .



Y si se trata de energía U encerrada por la superficie Σ , tendremos una corriente I_U , definida como:

$$I_Q = -\frac{dQ}{dt} \quad \left[\frac{C}{s} = \text{Ampere} \right]$$

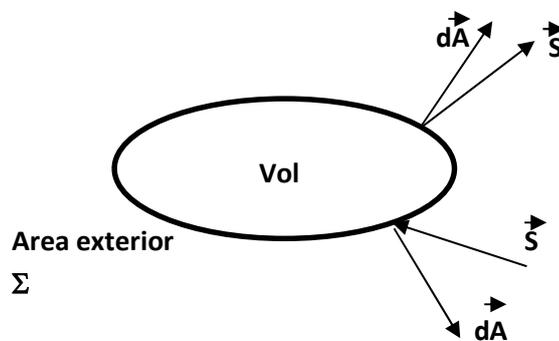
Resultando en la ya conocida corriente eléctrica I_Q .

Densidad de energía y vector de Poynting

Toda onda posee energía. Las ondas sonoras, por ejemplo, contienen energía cinética de las partículas de fluido, y además energía potencial debida a la compresión o enrarecimiento. Puede decirse que en un diferencial de volumen habrá un diferencial de energía $dU = u(x,y,z,t) dVol$, donde $u(x,y,z,t)$ se mide en $[J/m^3]$ y es la densidad de energía (por unidad de volumen).

Por otro lado, el vector de Poynting $\vec{S}(x, y, z, t)$ es un vector que nos indica la potencia sobre unidad de área que se propaga en cualquier punto del espacio, y se mide en $[W/m^2]$.

La densidad de energía u y el vector \vec{S} están relacionados: si en cierto volumen cerrado no se crea ni se disipa energía, el flujo de \vec{S} debe ser igual a la disminución de la energía almacenada en el mencionado volumen.



$$\oint_{\Sigma} \vec{S} \cdot d\vec{A} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{Vol} u(x, y, z, t) dVol$$

Aplicando el teorema de Ostrogradsky-Gauss:

$$\oint_{Vol} \nabla \vec{S} dVol = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{Vol} u(x, y, z, t) dVol$$

De donde:

$$\nabla \vec{S} = -\frac{\partial u}{\partial t} \quad (6)$$

Si la onda depende de una sola variable x , la (6) equivale a:

$$\boxed{\frac{\partial S(x, t)}{\partial x} = -\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}} \quad (7)$$

Si ahora la onda es progresiva (es decir se propaga en un único sentido), la función de onda será de la forma $\phi = f(x \pm ct)$. Tómese el “+” para onda hacia $-x$ y el “-” para onda hacia $+x$. Entonces la función $u(x,t)$ será una función $g(x \pm ct)$. Reemplazamos en (7):

$$\frac{\partial S(x, t)}{\partial x} = \mp c g'(x \pm ct)$$

$$S(x, t) = \mp c \int g'(x \pm ct) dx$$

$$S(x, t) = \mp c g(x \pm ct) = \mp c u(x, t)$$

Es decir:

$$\boxed{S(x, t) = \pm c u(x, t)}$$

Siendo “+c” para onda hacia $+x$ y “-c” para onda hacia $-x$. Nótese que esto vale para cualquier onda, sea mecánica o electromagnética, siempre que dependa de una sola variable.

Hay que destacar que, de todo lo visto, hay que hacer un pequeño cambio para ondas en cuerdas. Esto es así porque, a diferencia de la onda sonora, en la cuerda no existe un área transversal. Es por esto que en lugar del vector de Poynting \vec{S} [W/m²] tendremos directamente una corriente de energía $i_u(x,t)$ medida en [W]. En lugar de tener una densidad de energía u en [J/m³] tendremos una densidad lineal $\mu_u(x,t)$ en [J/m].

Energía de la onda en cuerdas

Deduzcamos las expresiones para la corriente de energía i_U y para la densidad lineal de energía μU para el caso de la cuerda.

Partimos de la ecuación de onda:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \\ T \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= \mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \\ v(x, t) T \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= v(x, t) \mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \\ v(x, t) T \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= v(x, t) \mu \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \\ v(x, t) T \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \mu v^2(x, t) \right] \quad (8)\end{aligned}$$

Desarrollemos ahora la siguiente derivada:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial \phi}{\partial x} v \right) = T \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} v + T \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \quad (9)$$

Reemplazamos (9) en (8):

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \mu v^2(x, t) \right] &= \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial \phi}{\partial x} v \right) - T \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \mu v^2(x, t) \right] &= \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial \phi}{\partial x} v \right) - T \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \\ \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \mu v^2(x, t) \right] &= \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial \phi}{\partial x} v \right) - T \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \mu v^2(x, t) \right] &= \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial \phi}{\partial x} v \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} T \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right] \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(-T \frac{\partial \phi}{\partial x} v \right) &= -\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \mu v^2 + \frac{1}{2} T \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right]\end{aligned}$$

Comparamos con la (7). De donde:

$$i_U(x, t) = -T \frac{\partial \phi}{\partial x} v \quad (10)$$

$$\mu_U(x, t) = \frac{1}{2} \mu v^2 + \frac{1}{2} T \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2$$

Siendo el primer término la componente de energía cinética a causa de la velocidad de los puntos de la cuerda:

$$\mu_{UCIN}(x, t) = \frac{1}{2} \mu v^2$$

Y el segundo término es la energía potencial, a causa de la energía que costó poner a la cuerda fuera del equilibrio.

$$\mu_{UPOT}(x, t) = \frac{1}{2} T \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2$$

Si la onda fuera progresiva, entonces además de la (10) que es específica para el caso de la cuerda, se cumpliría:

$$i_U(x, t) = \pm c \mu_U(x, t)$$

Y es demostrable que en el caso de onda progresiva, la densidad de energía potencial $\mu_{UPOT}(x, t)$ es igual a la de energía cinética $\mu_{UCIN}(x, t)$, de modo que $\mu_U(x, t) = 2 \mu_{UCIN}(x, t) = 2 \mu_{UPOT}(x, t)$.

Energía de la onda sonora en fluidos

Las ecuaciones son las siguientes. Las demostraciones se encuentran en el libro:

$$\vec{S}(x, y, z, t) = p(x, y, z, t) \vec{v}(x, y, z, t)$$

Si la onda depende de una sola variable:

$$S(x, t) = p(x, t) v(x, t)$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{1}{2} K_{ad} p^2$$

Si la onda fuera progresiva, entonces además, se cumpliría:

$$S(x, t) = \pm c u(x, t)$$

Y es demostrable que en el caso de onda progresiva, la densidad de energía potencial $u_{\text{POT}}(x, t)$ es igual a la de energía cinética $u_{\text{CIN}}(x, t)$, de modo que $u(x, t) = 2 u_{\text{CIN}}(x, t) = 2 u_{\text{POT}}(x, t)$.

Energía de la onda sonora en sólidos

Las ecuaciones son las siguientes. Las demostraciones se encuentran en el libro de Larrondo y Avalos:

$$\vec{S}(x, y, z, t) = -\sigma(x, y, z, t) \vec{v}(x, y, z, t)$$

Si la onda depende de una sola variable:

$$S(x, t) = -\sigma(x, t) v(x, t)$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{1}{2E} \sigma^2$$

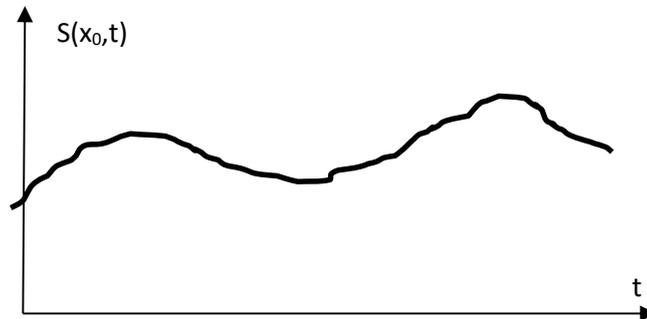
Si la onda fuera progresiva, entonces además, se cumpliría:

$$S(x, t) = \pm c u(x, t)$$

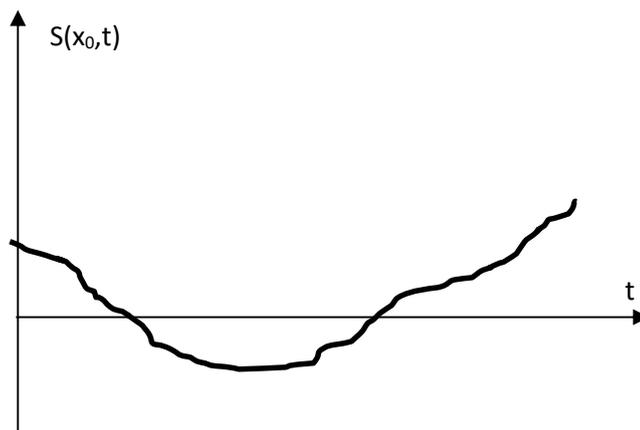
Y es demostrable que en el caso de onda progresiva, la densidad de energía potencial $u_{\text{POT}}(x, t)$ es igual a la de energía cinética $u_{\text{CIN}}(x, t)$, de modo que $u(x, t) = 2 u_{\text{CIN}}(x, t) = 2 u_{\text{POT}}(x, t)$.

Intensidad

En una onda progresiva hacia +x, la función $S(x,t)$ siempre toma valores positivos:



Mientras que si la onda es progresiva hacia x , $S(x,t)$ siempre toma valores negativos. Por último, si la onda no es progresiva, $S(x,t)$ toma valores a veces positivos y a veces negativos:



Pero a nosotros puede interesarnos el valor PROMEDIO de $S(x_0, t)$ para un punto fijo x_0 . En ese caso, como todo promedio, se hace una sumatoria, pero como el tiempo es un continuo, dicha sumatoria es una integral.

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T |S(x_0, t)| dt$$

Donde T es el período de repetición de la onda (si es periódica). Si no fuera periódica, se deberá considerar un valor de T conveniente para el caso particular.

Por ejemplo, para una onda armónica sonora:

$$\phi = A \cos(kx - \omega t + \delta_i)$$

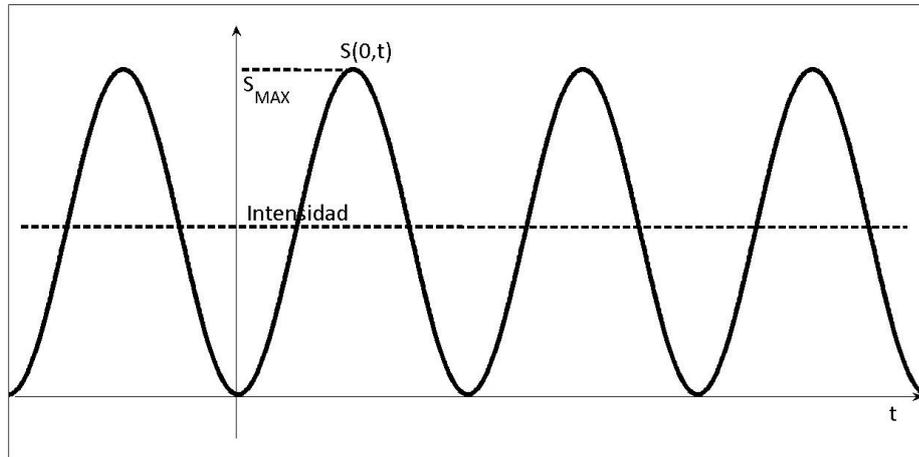
$$v = A \omega \sin(kx - \omega t + \delta_i)$$

$$u = 2 u_{CIN} = 2 \frac{1}{2} \delta v^2 = \delta A^2 \omega^2 \sin^2(kx - \omega t + \delta_i)$$

$$S = u c = \delta A^2 \omega^2 c \sin^2(kx - \omega t + \delta_i) = S_{MAX} \sin^2(kx - \omega t + \delta_i)$$

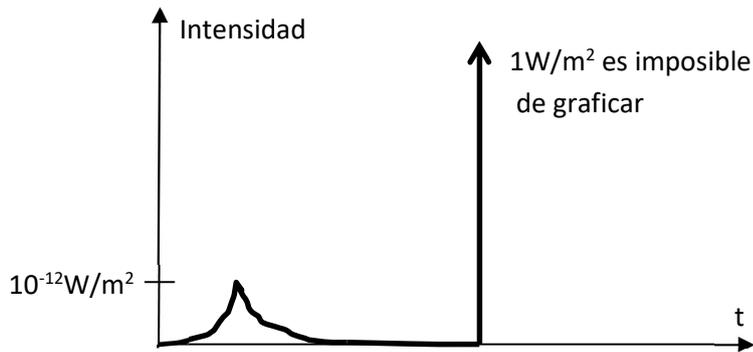
$$I = \frac{1}{T} \int_0^T |S(x_0, t)| dt = \frac{S_{MAX}}{2} = \frac{\delta A^2 \omega^2 c}{2}$$

Cuidado, la igualdad $I = S_{MAX} / 2$ solo es válida para ondas progresivas armónicas.



El decibel

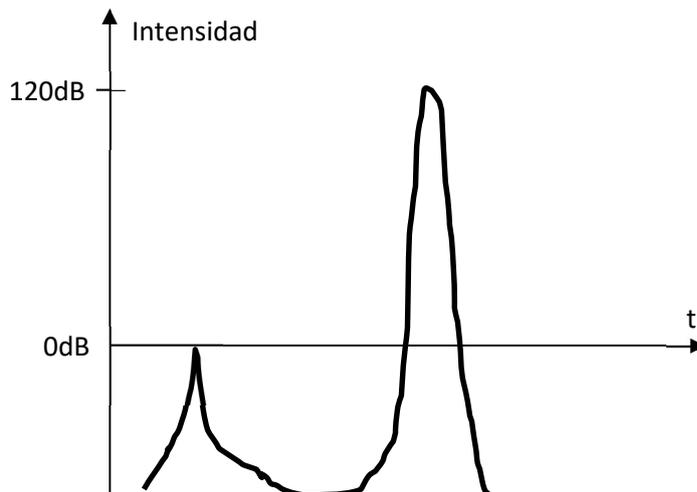
El oído humano es capaz de escuchar una intensidad sonora tan baja como 10^{-12}Wm^{-2} (caída de un alfiler). Y soporta hasta 1Wm^{-2} , y a partir de entonces comienza a sentir dolor. Si tenemos que graficar intensidades en un rango de valores tan amplio, ¿cómo incluirlas en el mismo gráfico?



La solución es comprimir la escala: tomar el logaritmo de la intensidad. Así, se define la intensidad en decibeles como:

$$I [dB] = 10 \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$$

Ahora el gráfico es sencillo: a 10^{-12}Wm^{-2} le corresponde 0dB, mientras que a 1Wm^{-2} le corresponde 120dB.



Pero cuidado que si ahora sumamos las intensidades de dos sonidos de 60dB no nos da 120dB sino 63dB. Para sumar intensidades hay que hacerlo con la intensidad expresada en Wm^{-2} .

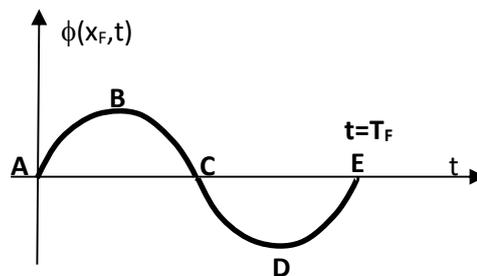
Efecto Doppler

El efecto Doppler consiste en que una fuente emite ondas de cierta frecuencia f_F . El observador (receptor) de estas ondas se está moviendo respecto de la fuente, de modo que recibirá una frecuencia distinta f_O .

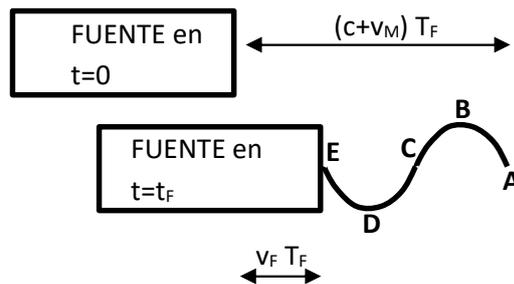
Ahora deduciremos f_O como función de f_F .

Para esto suponemos que la onda se propaga en un medio (por ejemplo el sonido se propaga en aire), y que ese medio puede estar en movimiento (por ejemplo hay viento que hace mover el aire). La velocidad del medio (por ejemplo del viento es v_M). La velocidad de la fuente es v_F y la del observador v_O , todas medidas respecto al eje x (que va en dirección fuente \rightarrow observador). Los signos de las velocidades se suponen positivas si van a favor del eje x .

Ahora la fuente emite un pulso:

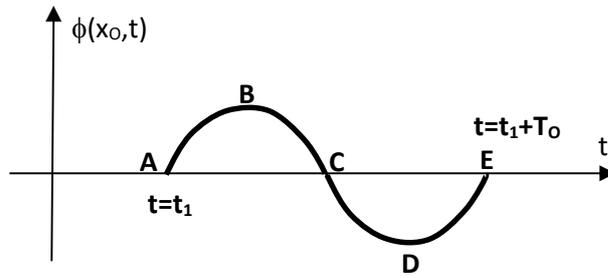


Las letras están para referencia. En $t=0$ se emite el punto A. Veamos la situación:

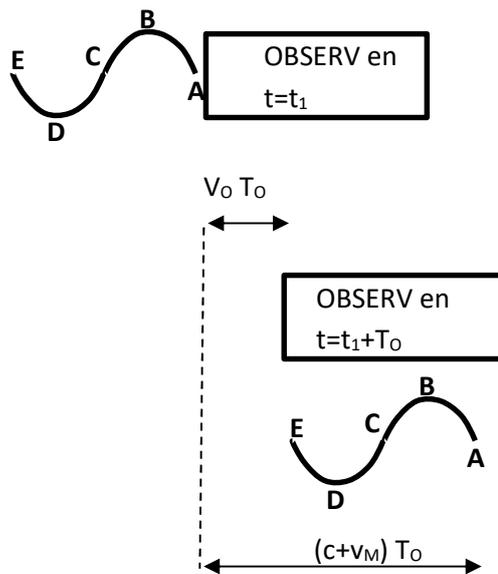


Donde se colocó las fuentes en distintos tiempos una encima de otra por razones de que se aprecie mejor el gráfico. Pero las fuentes sólo se mueven según "x". El pulso de onda, respecto de tierra, mide $\lambda = (c + v_M - v_F) T_F$.

Este pulso viaja hasta que alcanza al observador en un cierto instante, por ejemplo $t = t_1$ (el punto A llega al observador). El observador termina de recibir el pulso (punto E) para $t = t_1 + T_0$.



La situación en el eje "x" es:



Puede verse que $\lambda=(c+v_M-v_0)T_0$. Comparando los λ de ambos gráficos, se llega a:

$$\lambda = \lambda$$

$$(c + v_M - v_F)T_F = (c + v_M - v_O)T_O$$

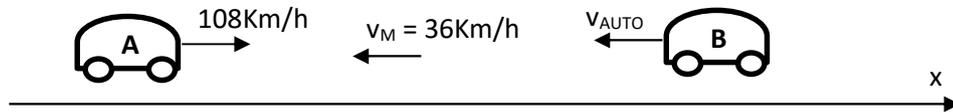
$$f_O = \frac{c + v_M - v_O}{c + v_M - v_F} f_F$$

Cuidado con los signos al usar la ecuación: las velocidades v_O , v_F , v_M tienen su signo positivo si coinciden con el sentido del eje x, el cual va siempre de fuente hacia observador. La velocidad c es siempre positiva.

Ejemplo: dos autos van en sentido contrario, acercándose entre sí. El auto A emite una bocina con frecuencia $f_F=200\text{Hz}$, y el auto B recibe una frecuencia $f_O=250\text{Hz}$. El auto A viaja a 108Km/h . El viento va a favor del auto B, a 36Km/h .

- ¿Cuál es la velocidad del auto B?
- ¿Qué frecuencia percibe el auto B luego de que los autos se hayan cruzado?

- a) Primero ponemos un eje que vaya de fuente (auto A) a observador (auto B), ponemos todas las velocidades con el mismo sistema de unidades, y les ponemos signo según su sentido coincida con el del eje "x".



$$v_F = +108 \text{ Km/h} = +30 \text{ m/s}$$

$$v_M = -36 \text{ Km/h} = -10 \text{ m/s}$$

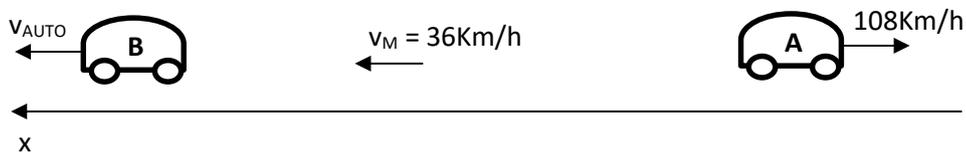
$$v_O = -|v_{\text{AUTO}}|$$

$$f_O = \frac{c + v_M - v_O}{c + v_M - v_F} f_F = \frac{340 + (-10) - (-|v_{\text{AUTO}}|)}{340 + (-10) - 30} 200$$

$$250 = \frac{330 + |v_{\text{AUTO}}|}{300} 200$$

$$\Rightarrow |v_{\text{AUTO}}| = 45 \text{ m/s}$$

- b) Al haberse cruzado los autos, el eje "x" debe ir ahora hacia la izquierda:



Ahora:

$$v_F = -108 \text{ Km/h} = -30 \text{ m/s}$$

$$v_M = +36 \text{ Km/h} = +10 \text{ m/s}$$

$$v_O = v_{\text{AUTO}} = 45 \text{ m/s}$$

$$f_O = \frac{c + v_M - v_O}{c + v_M - v_F} f_F = \frac{340 + 10 - 45}{340 + 10 - (-30)} 200 = 160 \text{ Hz}$$